Problemas de Probabilidad y Estadística

Problemas de Probabilidad y Estadística

Jaime Grabinsky
Javier Ramírez
Jorge Rivera
Julio Alonso
Rafael López

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Sistemas

ISBN: 970-654-971 -4

Jaime Grabinsky
Javier Ramírez
Jorge Rivera
Julio Alonso
Rafael López

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Problemas de probabilidad y estadística

1a. edición, 1986
2a. edición, 2002
4a. reimpresión, 2005

Impreso en México

PRESENTACIÓN

El objeto de este trabajo es el de disponer de un apoyo para el curso de Probabilidad y Estadística. El punto de partida fué un problemario elaborado por un grupo de profesores de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Invitamos a los lectores a hacernos las sugerencias que estimen pertinentes, así como también nos den a conocer los errores u omisiones que detecten.

El apoyo siempre eficiente de mecanografía de la Srita. Clara Durán García, fué decisivo para la conclusión de esta versión.

ATENTAMENTE

Prof. Jaime Grabinsky Steider
Prof. Javier Ramírez Rodríguez
Prof. Jorge Rivera Benítez
Prof. Julio Alonso Cruz
Prof. Rafael López Bracho

C O N J U N T O S

Y

E S P A C I O   M U E S T R A L

1. Suponga que se tienen los siguientes conjuntos: $U=\{a,b,c,d,e\}$ que representa el conjunto universal; $A=\{a,b,c\}$; $B=\{b,c,d\}$ Con base a lo anterior encuentre:

1) $A \cup B$;

2) B^C;

3) $B \cap A$;

4) $B - A$;

5) $A^C \cap B$;

6) $A^C \cap B^C$;

7) $(A \cap B)^C$;

8) $A \cup B^C$;

9) $B^C - A^C$;

10) $(A \cup B)^C$

SOLUCIÓN:

1) La unión de A y B consta de todos los elementos de A y B o de ambos o sea, $A \cup B = \{a,b,c,d\}$

2) El complemento de B es el que reúne a los elementos del universo que no están en B, es decir, $B^C=\{a,e\}$

3) La intersección de A y B cuenta con los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B, es decir, que se encuentran en ambos conjuntos: $A \cap B = \{b,c\}$

4) La diferencia de B y A incluye a los elementos de B que no pertenecen a A; $B-A = \{d\}$

5) $A^C= \{d,e\}$ y $B= \{b,c,d\}$, entonces $A^C \cap B = \{d\}$

6) $A^C= \{d,e\}$ y $B^C= \{a,e\}$, entonces $A^C \cap B^C = \{e\}$

7) $A \cap B = B \cap A$ (ver el número 3), así $(A \cap B)^C = \{a,d,e\}$

8) $B^C= \{a,e\}$ y $A= \{a,b,c\}$, entonces $A \cup B^C = \{a,b,c,e\}$

9) $B^C - A^C = \{a\}$

10) $(A \cup B)^C= \{e\}$

2. Determinar el espacio muestral y algunos eventos para la situación siguiente:

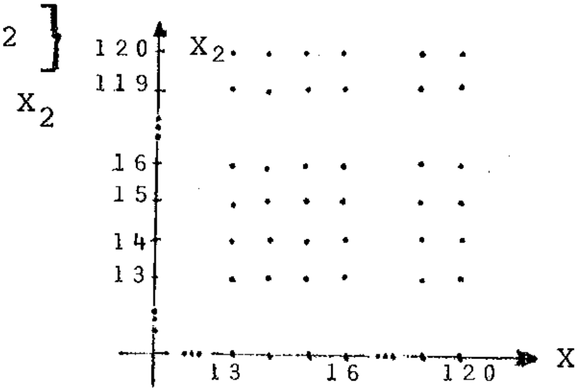
Una compañía de seguros está interesada en conocer las edades en años cumplidos de las parejas aseguradas.

SOLUCIÓN:

Si se supone que la edad de los elementos de una pareja no es menos de 13 ni más de 120 años, se puede definir el espacio muestra:

$$\Omega = \left\{ (X_1,\ X_2):\ 13 \leq X_i \leq 120;\ i = 1,2 \right\}$$

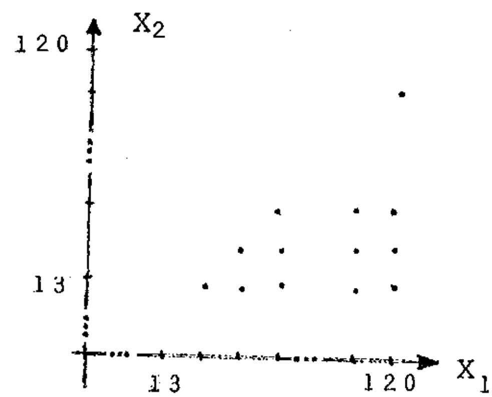
donde X_1 es la edad del hombre y X_2 es la edad de la mujer



Para este espacio muestra se pueden definir los siguientes eventos:

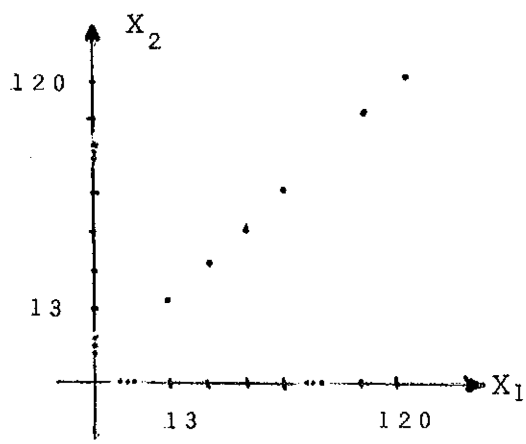
a) E_1: El hombre es mayor que la mujer

$$E_1 = \left\{ (X_1, X_2): X_1 > X_2 \right\}$$



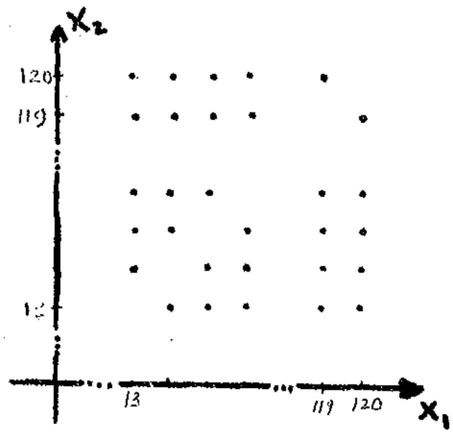
b) E_2: El hombre tiene la misma edad que la mujer

$$E_2 = \left\{ (X_1, X_2): X_1 = X_2 \right\}$$



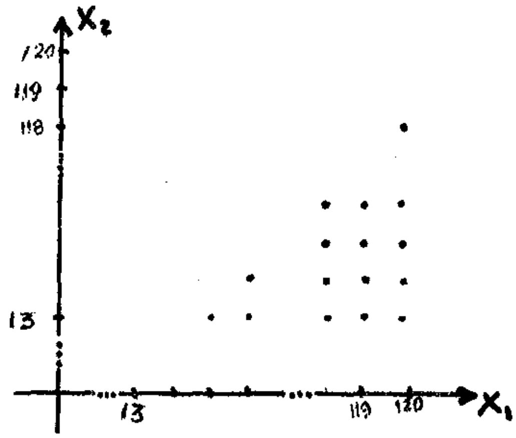
c) E_3 : Los elementos de todas las parejas tienen edades diferentes.

$E_3 = \{(X_1, X_2) : X_1 \neq X_2\}$



d) E_4 : El hombre es al menos 2 años mayor que la mujer

$E_4 = \{(X_1, X_2) : X_1 \geqslant X_2 + 2\}$



3. Se lanzan dos dados. Determine cuales son los puntos muestrales en cada uno de los siguientes eventos definidos en el espacio muestral de este experimento:

a) La suma es 11. b) La suma es 7. c) La suma es menor que 5

d) La suma es menor o igual a 12.

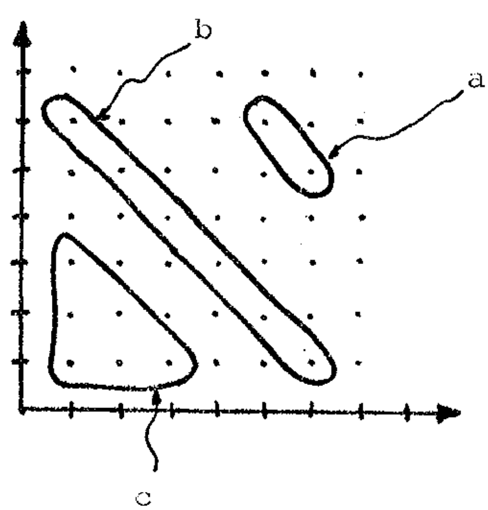
SOLUCIÓN:

a) La suma es 11 $= \{(6,5)\ ,\ (5,6)\}$

b) La suma es 7 $= \{(4,3),\ (3,4),\ (5,2),(6,1)\ (1,6)\ (2,5)\}$

c) La suma es $< 5 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\ (3,1),(1,3)\ (2,2)\}$

d) Todo el espacio muestral.



4. Determine el espacio muestral y algunos eventos para la siguiente situación:

"En un experimento agrícola se examina el rendimiento por hectárea de 5 variedades de trigo. Las 5 variedades se desarrollan bajo condiciones uniformes".

SOLUCIÓN:

El espacio muestra es el conjunto:

$$\Omega = \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) / X_i \geqslant 0;\ i=1,2,3,4,5,\}$$

donde X_i es el rendimiento en toneladas por hectárea de la variedad i

Para éste experimento se pueden definir los siguientes eventos.

a) E_1: ninguna variedad rinde más de 10 ton/ha.

$$E_1 = \{ (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \quad 0 \leq X_i \leq 10,\ i=1,2,3,4,5\}$$

b) E_2 : La primera variedad rinde más que las otras variedades

$$E_2 = \{ (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mid X_1 \geqslant X_i;\ i=2,3,4,5,\}$$

c) E_3 : Todas las variedades rinden igual

$$E_3 = \{ (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mid X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 \}$$

d) E_4 : El rendimiento promedio de las 5 variedades es por lo menos 8 ton/ha

$$E_4 = \{ (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mid \frac{1}{5} (X_1+X_2+X_3+X_4+X_5) \geqslant 8 \}$$

5. Se lanza un dado hasta que aparece un uno.

Solución:

Como no se puede predecir con certeza el número de lanzamientos necesarios para obtener un uno, el espacio muestra es:

$$\Omega = \{ 1,2,3,4,\ldots \}$$

6. Un mecanismo tiene dos tipos de partes, tipo I y tipo II Suponga que hay dos del tipo 1 y 3 del tipo II. Defina los eventos A_K K=1,2, B_j j=1,2,3 como sigue

A_K : la unidad K-ésima de tipo I funciona apropiadamente
B_j : la unidad j-ésima de tipo II funciona apropiadamente

Finalmente sea C el evento el mecanismo funciona. Dado que el mecanismo funciona si por lo menos una unidad del tipo I y por lo menos dos unidades del tipo II, exprese el evento C en término de las A_k's y de las B_j's.

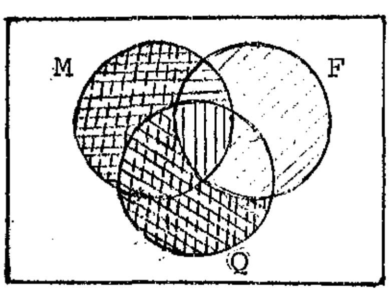
SOLUCIÓN:

$$C= \left[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^C) \cup (A_1^C \cap A_2)\right] \cap \left[(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3^C) \cup (B_1 \cap B_2^C \cap B_3) \cup (B_1^C \cap B_2 \cap B_3)\right]$$

7. Al interrogar a un grupo de alumnos de tercer trimestre acerca de sus inscripciones a los cursos de Matemáticas, Física y Química se encontró que de los 400 alumnos cuestionados.

289 cursaban Matemáticas	83 cursaban Matemáticas y Física
146 cursaban Física	217 cursaban Mátemáticas y Química
275 cursaban Química	63 cursaban Física y Química

Elabore diagramas de Venn y determine el número de alumnos que: a) cursan tres materias, b) Matemáticas pero no Química, c) Física pero no Matemáticas, d) Química pero no Física, e) Matemáticas o Química pero no Física, f) Matemáticas pero no Física ni Química.



a) $N(M \cap F \cap Q) = 53$ (|)
b) $N(M \cap Q') = 72$ (-)
c) $N(F \cap M') = 63$ (/)
d) $N(Q \cap F') = 212$ (\)
e) $N(M \cup Q \cap F') = 256$ (⁄)
f) $N(M \cap F' \cap Q') = 44$ (#)

M: Alumnos que estudian matemáticas
F: Alumnos que estudian física
Q: Alumnos que estudian química

PROBLEMAS:

1. Para cada uno de los siguientes fenómenos aleatorios, dé una descripción precisa del espacio muestra:

   i) Observar el kilometraje del odómetro de cualquier carro estacionado dentro de las instalaciones de la UAM.

   ii) Observar el punto de impacto de un meteorito cayendo en la tierra.

   iii) Un gran lote de tornillos tiene cierto número de tornillos defectuosos. Se escogen 3 tornillos al azar y se prueban.

   iv) Una caja con 10 tornillos tiene uno defectuoso, tres tornillos se escogen al azar y se prueban.

2. Un termómetro de los llamados máximo-mínimo, es leído cada mañana a las 6 a.m. y se registra lo siguiente: la temperatura presente, y las temperaturas máxima y mínima durante las pasadas 24 horas. Defina adecuadamente el espacio muestra para:

   i) Un día de observación.

   ii) Un mes de observación.

3. A todos los habitantes de un pueblo se les pide contestar el siguiente cuestionario:

a) ¿Usted sufre de bronquitis?

b) Si su respuesta fue afirmativa, ahora conteste a la pregunta: ¿Usted fuma?

i) Dé el espacio muestra del cuestionario anterior.

ii) ¿Cuantos elementos tiene ese espacio muestra?

iii) Tomando como base las respuestas del cuestionario anterior ¿considera que usted puede decidir si una persona tiene bronquitis ?

4. Una caja de N focos tiene r focos con los filamentos rotos ($r \leq N$) y una persona los prueba uno por uno hasta que encuentra un foco defectuoso, observando unicamente si el foco prende o no prende cuando lo prueba.

i) Describa el espacio muestra generado por esta operación.

ii) ¿Cuántos puntos hay en el espacio muestra?

iii) Generalice al caso en que los focos son probados uno por uno hasta que se encuentran exactamente s defectuosos.

5. Considere que el espacio muestra de un experimento es el conjunto de números reales. Suponga que para un tomador de decisiones particular, los conjuntos

$$A=\{w: -\infty < w \leq 5\} \equiv (-\infty ,5) \text{ y}$$
$$B=\{w: 3 \leq w \leq 6\} = [3,6]$$

resultan ser subconjuntos interesantes del espacio muestra, o sea que estos subconjuntos son eventos. Enumere que otros subconjuntos también serán interesantes para él o equivalentemente que puedan ser considerados como eventos:

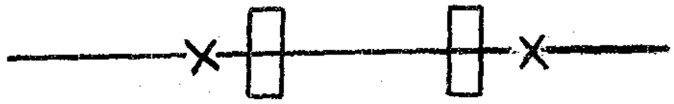
6. Considere que se tiran dos dados distinguibles (por ejemplo, uno rojo y otro azul). Describa con símbolos y con diagramas los siguientes eventos:

i) A_1 : el menor de los números sea i, i=1,2,...,6
¿Son desunidos (ie. mutuamente desunidos)?

ii) B_1 : el mayor de los dos números es i; i=1,...,6

iii) C_1 : la suma de los dos números es i; i=2,...,12

7. (SISTEMA EN SERIE). Considere un sistema formado por dos componentes conectados en serie como se muestra en la figura.



Cada componente tiene dos valores: falla (etiquetado por el valor 0) o no falla (este estado lo identificaremos diciendo que toma el valor 1). Además el estado de un componente es independiente del estado en que se encuentra el otro componente. El sistema opera si no se interrumpe el flujo (de corriente, de líquido, de comunicación, etc.) entre las dos cruces marcadas en el diagrama.

Si a_1 representa el estado de un componente y a_2 el del otro componente, entonces el estado del sistema queda representado por el par (a_1, a_2) y así el espacio muestra resulta

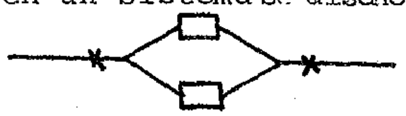
$$\Omega = \left\{ w=(a_1,\ a_2): \quad a_1 \in \{0,1\} \right\}$$

Sean

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{ w=(a_1,a_2): & \min\{a_1,\ a_2\} = 0 \} \\
A_1 &= \{ w=(a_1,a_2): & \min\{a_1,\ a_2\} = 1 \} \\
B_0 &= \{ w=(a_1,a_2): & \max\{a_1,\ a_2\} = 0 \} \\
B_1 &= \{ w=(a_1,a_2): & \max\{a_1,\ a_2\} = 1 \}
\end{aligned}$$

Si F es el evento de que falle el sistema y F^c el que no falle, exprese estos eventos en términos de los eventos A_0, A_1, B_0 y B_1.

8. (SISTEMA EN PARALELO O SISTEMA REDUNDANTE). Un sistema en paralelo con dos componentes en un sistema se diseñó de acuerdo al siguiente diagrama:



Siguiendo la discusión y la notación que se dió en el sistema en serie (ver problema anterior), conteste las mismas preguntas cuando tenemos el sistema en paralelo.

9. Una tienda abre a las 9 A.M. y cierra a las 7 P.M. Un cliente cualquiera, entra a la tienda en el tiempo x y sale en el tiempo y, (ambas variables son medidas en horas). Describa el espacio muestra de (x,y). Describa en término de (x,y), los siguientes eventos, (descríbalos matemáticamente y en forma gráfica).

i) El cliente permanece en la tienda menos de una hora.
ii) El cliente está en la tienda a las 10 A.M.
iii) El Cliente está en la tienda a las 9 P.M.
iv) El cliente entro antes de las 11 A.M. y salió después de las 12 A. M.

10. Un lote de 20 plumas fuentes contiene 10 plumas que no son defectuosas, 8 plumas con defectos de tipo a, 5 con defectos de tipo b, y 3 plumas con ambos tipos de defectos. Suponga que una pluma se selecciona al azar. Describa los siguientes eventos, indicando cuántos elementos tiene cada uno de estos eventos.

i) A: obtener una pluma con defecto de tipo a. RESP. #(A)=8
ii) B: obtener una pluma con defecto del tipo b. RESP. #(B)=5
iii) $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ $A^c \cap B^c$ RESP. 3,5,2,10
iv) $A \cup B$, $A^c \cup B$, $A \cup B^c$ $A^c \cup B^c$ RESP. 10,15,18,17

11. Una estación de televisión realiza una encuesta telefónica en su localidad para determinar cuantas personas han visto tres programas especiales que se han transmitido recientemente. Sean A el evento de que la persona entrevistada haya visto el programa a, B el evento de que haya visto el programa b, y C el que haya visto el programa C. Un total de 1000 personas son telefoneadas. Los resultados son:

i) 221 han visto al menos a;

ii) 209 han visto al menos b;
iii) 112 han visto al menos c;
iv) 197 han visto al menos dos de los programas;
v) 45 han visto todos los programas;
vi) 62 han visto al menos a y b;
vii) el número de personas que han visto al menos a y b es dos veces más grande que el número de aquellos que han visto al menos b y c.

¿Son congruentes los datos proporcionados? ¿Por qué?

12. Un puesto para inspeccionar la seguridad de los automóviles encontró en 1000 carros revisados, los siguientes resultados:

100 necesitaban alineación, ajuste de frenos, y ajuste de luces.
325 necesitaban dos de los tres tipos de servicio
125 necesitaban revisión de ajuste de luces y ajuste de frenos.
550 necesitaban alineación

a) ¿Cuántos carros unicamente necesitaban alineación?
b) ¿Cuántos que no necesitan alineación, no necesitan más de uno de los otros dos tipos de servicio?

RESPUESTAS:

a) 150 b) 425

13. En lo que sigue la notacion AB significa instersección de A y B.

a) Pruebe que si $A \subset B$ entonces $B^c \subset A^c$
Primero ilustre esta afirmación con un diagrama de Venn y después una prueba formal.

b) Pruebe: $AB \subset A \subset A \cup B$. Ilustre estas relaciones con un diagrama de Venn.

c) Pruebe que $AB=\emptyset$ implica $A \subset B^c$

d) Pruebe que $B= (AB) \cup (A^c B)$

P R O B A B I L I D A D

1. Considere una población en la que hay tres plomeros; en un día específico cuatro residentes llaman a un plomero.

¿Cuál es la probabilidad de que

a) Todos los plomeros sean llamados?

b) Exactamente un plomero sea llamado?

SOLUCIÓN:

El número de formas en que los 4 habitantes pueden llamar a alguno de los 3 plomeros es igual a:

$$3^4 = 81$$

a) Sean los eventos

A_i: El plomero sea llamado 2 veces y los otros dos, una sola vez.

$i = 1,2,3$

y A : Todos los plomeros son llamados

El evento A se puede expresar como

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

donde A_1, A_2 y A_3 son mutuamente excluyentes

El número de posibilidades para A_i es $\dfrac{4!}{1!2!1!} = 12$

entonces

$$P(A) = 3\left(\frac{12}{81}\right)$$

$$P(A) = \frac{4}{9}$$

b) Sea el evento

B: Exactamente un plomero sea llamado

entonces

$$P(B) = 3\left(\frac{1}{81}\right)$$

$$P(B) = \left(\frac{1}{27}\right)$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Los cumpleaños de 12 personas acontezcan en 12 meses diferentes del calendario? (Supónga probabilidades iguales para los 12 meses del año)

b) Los cumpleaños de 6 personas sean todos en 2 meses del calendario, evitando que todas las personas cumplan años el mismo mes?.

SOLUCIÓN:

a) Sea A: Los cumpleaños de las 12 personas acontezcan en los 12 meses diferentes del calendario

$$P(A) = \frac{12.\ 11.\ 10 \ldots 1}{12.\ 12.\ 12 \ldots 12} = \frac{12!}{12^{12}}$$

$$= \frac{\text{num.de asignaciones de 12 personas en 12 meses diferentes}}{\text{num.de conjuntos de 12 meses permitiendo repetición}}$$

b) Sea B: El cumpleaños de 6 personas en dos meses

$$P(B) = \frac{\binom{12}{2}(2^6 - 2)}{12^6} = 0.00137$$

(el -2 surge de la eliminación de las 2 posibilidades en que todos los cumpleaños son en 1 mes)

3. ¿Es posible tener una asignación de probabilidades tal como:

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$?

SOLUCIÓN:

No, porque si un conjunto C contiene a un conjunto D. $(D \subset C)$, entonces $P(D) \leq P(C)$ y en este caso no se cumple esta condición:

$(A \cap B) \subset B$ y $P(A \cap B) > P(B)$

4. Si se sabe que $(P \cup B) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, ¿Se podrán determinar

$P(A)$ y $P(B)$?

SOLUCIÓN:

No, porque de $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ se tiene que $P(A) = 1-P(B)$ y esta condición se cumple para un número infinito de valores.

5. Dado un experimento tal que $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$, calcular:

a) $P(A^c)$

SOLUCIÓN:

$$P(A^c)=1-P(A)$$
$$=1-\frac{1}{2}$$
$$P(A^c)=\frac{1}{2}$$

b) $P(B^c)$

SOLUCIÓN:

$$P(B^c)=1-P(B)$$
$$=1-\frac{1}{2}$$
$$P(B^c)=\frac{1}{2}$$

c) $P(A \cap B)$

SOLUCIÓN:

Se sabe que:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

de donde se tiene:

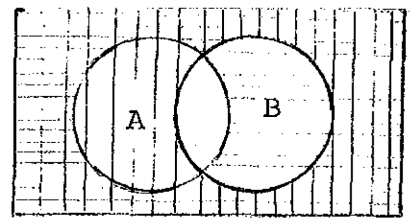
$$P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$$
$$P(A \cap B)=\frac{1}{3}$$

d) $P(A^C \cap B^C)$

SOLUCIÓN:

aplicando una de las leyes de Morgan

$$P(A^C \cap B^C) = P\ (A \cup B)^C$$
$$= 1 - P(A \cup B)^C$$
$$= \frac{1}{3}$$



A^C está representada por el área con rayado horizontal

B^C está representada por el área con rayado vertical

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ está representada por el área con rayado cuadriculado

e) $P(A^C \cup B^C)$

SOLUCIÓN:

$$P(A^C \cup B^C) = P(A^C) + P(B^C) - P(A^C \cap B^C)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

f) $P(A \cap B^C)$

SOLUCIÓN:

$$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{6}$$

g) $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

SOLUCIÓN:

$$= \frac{1}{6}$$

h) $P(A^C \cup B)$

SOLUCIÓN:

$$= P(A^C)+P(B)-P(A^C \cap B)$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

6. Dado un experimento tal que $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A \cap B)=\frac{1}{4}$, calcular:

a) $P(A \cup B)$

SOLUCIÓN:

$$P(A \cup B)= P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B)= \frac{7}{12}$$

b) $P(A^C \cup B)$

SOLUCIÓN:

$$P(A^C \cup B)= P(A^C)+P(B)-P(A^C \cap B)$$

$$= 1-P(A)+P(B)-P(B)+P(A \cap B)$$

$$= 1-P(A)+P(B)-P(B)+P(A \cap B)$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

c) $P(A^c \cap B)$

SOLUCIÓN:

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{12}$$

d) $P(A \cap B^c)$

SOLUCIÓN:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4}$$

e) $P(A^c \cap B^c)$

SOLUCIÓN:

$$P(A^c \cap B^c) = P\left[(A \cup B)^c \right]$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{5}{12}$$

f) $P(A^c \cup B^c)$

SOLUCIÓN:

$$= P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$$

$$= 1 - P(A) + 1 - P(B) - P(A^c \cap B^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{5}{12}$$

$$= \frac{3}{4}$$

PROBLEMAS

1. Se van a colocar cinco libros en un anaquel de una biblioteca, estos son los correspondientes a Historia, Civismo, Algebra, Literatura y Geografía. ¿De cuantas formas pueden colocarse estos libros de tal manera que no queden juntos el de Historia y el de Geografía?

2. Diez personas se ordenan aleatoriamente
   a) en una fila
   b) en un círculo

   Se supone que todas las ordenaciones son igualmente posibles.

   Hállese la probabilidad de que dos personas dadas estén contiguas.

3. Dos personas juegan volados y han convenido en continuar el juego hasta que tanto el águila como el sol se hayan presentado por lo menos tres veces. Hállese la probabilidad de que el juego no se acabe cuando se hayan hecho diez volados.

4. En cada una de seis tarjetas idénticas está impresa una de las letras siguientes: a, t, m, r, s, e. Las tarjetas están bien mezcladas. Hallar la probabilidad de que en cuatro tarjetas extraídas de una por una y dispuestas en una línea, se puede leer la palabra tres.

5. Pruebe $AB=\emptyset$ implica $P(A) \leq P(B^C)$

6. Pruebe:
   i) Si A y B son arbitrarios entonces $P(AB) \leq \min\{P(A), P(B)\}$
   ii) Si $A \subset B$ entonces $P(AB) = P(A)$

7. Pruebe
   i) Si A y B son arbitrarios entonces $P(A\cup B) \geq$ maximo $\{P(A), P(B)\}$
   ii) Si $A \subset B$ entonces $P(A\cup B) = P(B)$

8. Cuarenta cursos específicos son requeridos para obtener un título profesional en cierta universidad. Un estudiante recibe el título si pasa todos los 40 cursos. Demuestre que la probabilidad de que reciba el título no puede ser mayor que la mínima de las probabilidades de pasar cualquiera de los cursos.

9. Demuestre que $P(EF^C) = P(E) - P(EF)$

10. Demuestre que $P(A) = P(B)$ si y solo si $P(AB^C) = P(A^CB)$

11. Suponga que $P(A)=0.5$ y $P(B)=0.3$ ¿Cuál es el máximo valor posible para $P(AB)$? Usando esta cota superior para $P(AB)$, determine las siguientes probabilidades:

$$P(AB^C)\ , \qquad P(A^CB) \qquad \text{y} \qquad P(A^CB^C)$$

12. En una cierta población con igual número de hombres y mujeres adultos, se tiene que el 5% son desempleados. El 20% de los desocupados son mujeres. Una persona se selecciona al azar de esta población. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o que tenga trabajo?

(PROPIEDAD SUBADITIVA DE P O DESIGUALDAD DE BOOLE)

13. Pruebe que:

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

En general esta desigualdad dice:

$$P\left(\bigcup_{i=i} A_i\right) \leq \sum_{i=i} P(A_i)$$ (No hace falta que la pruebe)

Para el caso de dos eventos A y B, la desigualdad de Bonferroni se presenta en las siguientes versiones:

i) $P(AB) \geq 1 - \left[P(A^c) + P(B^c)\right]$

i') $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

14. Pruebe i) y i').

En general esta desigualdad corresponde a cualquiera de las siguientes expresiones:

ii) $P(A_1A_2\ldots A_n) \geq 1 - \left[P(A_1^c)+P(A_2^c)+\ldots + P(A_n^c)\right]$

ii') $P(A_1A_2\ldots A_n) \geq P(A_1)+P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$

iii) INTERPRETACION. Una interpretación intuitiva se logra fácilmente siguiendo la expresión ii): Si estamos casi seguros de cada uno de los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ van a ocurrir o sea que $P(A_i) \doteq 1$, (lease aproximadamente igual a uno), entonces podemos estar bastante confiados de que todos ellos ocurrirán (o sea que $P(A_1A_2\ldots A_n) \doteq 1$).

Pruebe ii) y ii'), y justifique la afirmación en iii).

INDEPENDENCIA

Y

PROBABILIDAD CONDICIONAL

1. Sean A y B dos sucesos asociados con un experimento. Supongamos $P(A)=0.4$; mientras que $P(A \cup B)=0.7$. Si $P(B)=q$.

   a) ¿Para qué elección de q, son A y B mutuamente excluyentes?

   b) ¿Para qué elección de q, son A y B independientes?.

SOLUCIÓN:

Datos: $P(A) = 0.4$

$P(A \cup B) = 0.7$

$P(B) = q$

a) A y B son excluyentes si $P(A \cap B) = 0$ o sea si:

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) = 0.7$$

de donde

$$0.4 + P(B) = 0.7, \quad P(B) = 0.3$$

b) A y B son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Y sabemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

de donde A y B son independientes si, sustituyendo valores

$$0.7 = 0.4 + P(B) - 0.4\, P(B)$$

donde $P(B) = 0.5$ o bien $q=0.5$

2. Dados dos eventos no vacíos independientes ¿son ellos excluyentes?.

SOLUCIÓN:

No porque dos eventos no vacíos son independientes si y sólo si

$P(A \cap B) = P(A)P(B) \neq 0$, ya que A y B son no vacíos por lo que tienen probabilidades diferentes de 0.

Pero $P(A \cap B) \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Como la intersección es no vacía no son excluyentes q.e.d.

3. Si dos eventos no vacíos son excluyentes, ¿Son independientes?

SOLUCIÓN:

No, porque A y B son excluyentes si y solo si $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

Pero además, como A y B son no vacíos, se tiene

$$P(A) \neq 0$$

y $P(B) \neq 0$

de donde

$$P(A)P(B) \neq 0 = P(A \cap B)$$

y A y B no son independientes

q.e.d.

4. En los códigos de construcción es usual considerar como eventos independientes la ocurrencia de temblores y la de vientos de alta velocidad.

Si por ejemplo, la probabilidad de ocurrencia de un temblor de magnitud moderada-alta en un minuto dado es de 10^{-8} y la de un viento de alta velocidad es de 10^{-5}, la probabilidad de ocurrencia de ambos eventos en forma simultánea es

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = 10^{-8} \times 10^{-5} = 10^{-13}$$

En los reglamentos se acepta que pueden ocurrir simultáneamente. Esta hipótesis es razonable, ya que la probabilidad así calculada resulta del mismo orden que la asociada a eventos muy improbables (por ejemplo la caída de un meteorito en una estructura) que tampoco se considera en los diseños.

5. Un inversionista compra cinco acciones diferentes; si las probabilidades de que los precios de estas acciones aumenten son respectivamente de 0.7, 0.6, 0.8, 0.5, y 0.3 ¿Cuál es la probabilidad de que los precios de las cinco acciones aumenten?

SOLUCIÓN:

Suponiendo que son eventos independientes

$$P\left\{\text{las cinco aumentan}\right\} = 0.7\ (0.8)(0.6)(0.5)(0.3)=0.0504$$

$$= 0.0504$$

6. Pruebe que si A y B son eventos independientes, también lo son A y B^c y A^c y B^c.

SOLUCIÓN:

A y B son independientes si y sólo si

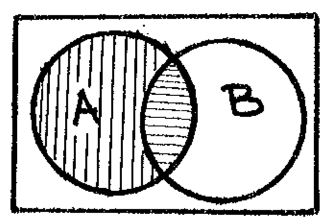
$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

a).- Demostrar que A y B^c son independientes si A y B lo son, Significa demostrar que $P(A \cap B^c) = P(A)\ \ P(B^c)$ dado que:

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

Por el teorema de eliminación o de la probabilidad total o por simple teoría de conjuntos.

En el dibujo se observa que



$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

Aplicando la hipótesis de la independencia de A y B

$$P(A) = P(A)\ P(B) + P(A \cap B^c)$$
$$P(A) - P(A)\ P(B) = P(A \cap B^c)$$
$$P(A)\left[1 - P(B)\right] = P(A \cap B^c)$$
$$P(A)\quad P(B^c) = P(A \cap B^c)$$

b).- A^c y B se resuelve como en el inciso a)

c).- $P(A^c)\,P(B^c) = P(A^c \cap B^c)$ dado que $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

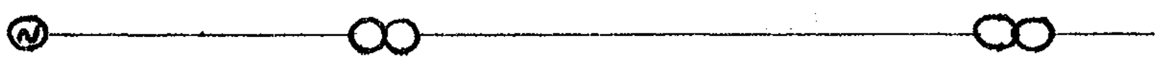
Sabemos por las leyes de Morgan que:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

de donde

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P(A \cup B)^c \\
&= 1-P(A \cup B) \\
&= 1-\left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right] \\
&= 1-\left[P(A) + P(B) - P(A)P(B)\right] \\
&= 1- P(A) - P(B)\left[1-P(A)\right] \\
&= P(A^c) - P(B)\, P(A^c) \\
&= P(A^c)\left[1-P(B)\right] \\
&= P(A^c)\, P(B^c)
\end{aligned}
$$

7. El sistema de transmisión de energía eléctrica al consumidor está compuesto de los siguientes elementos: el generador G, el transformador elevador T1, la línea de transporte de energía L y el transformador reductor T2. La probabilidad de falla de los elementos de la transmisión son $q_G = 2x10^{-3}$ $q_{T1} = 5x10^{-5}$ $q_L = 2x10^{-3}$ y $q_{T2} = 4x10^{-5}$ respectivamente.



G $\quad$ T_1 $\quad$ L $\quad$ T_2

Determinar la probabilidad de que el consumidor no reciba energía eléctrica debido al fallo del sistema, considerando que los sucesos de fallo de los elementos son independientes entre sí.

SOLUCIÓN:

Para que falle el sistema basta que uno de sus cuatro componentes falle. La probabilidad de que falle es 1-P(funcione). La P(funcione) es la probabilidad del evento los 4 componentes funcionan. Como son independientes:

P(funcione)=P(funcione G) P(funcione T1) P(funcione L) P(funcione T2)

$$=(1-q_G)\ (1-q_{T1})\ (1-q_L)\ (1-q_{T2})$$

$$=(0.9980)\ (0.99995)\ (0.998)\ (0.99996) = 0.995914$$

P (falle) = 1-P(funcione) = 0.004086

8. Un consumidor recibe energía eléctrica por dos circuitos en paralelo de la línea de transporte de energía. La probabilidad de fallo de cada circuito es $q = 4x10^{-3}$. Cada circuito puede transmitir el 100% de potencia. Los sucesos de fallo de los circuitos son independientes.

a) Determinar la probabilidad de fallo de ambos circuitos y

b) Determinar la probabilidad de conservación del suministro al consumidor.

SOLUCIÓN:

a) Como son independientes, $P(\text{falla ambos}) = (4x10^{-3})^2$

$$= 16x10^{-6}$$

$$= 1.6x10^{-5}$$

b) Hay suministro cuando alguno de los circuitos funciona o ambos. No hay suministro cuando ambos circuitos fallan.

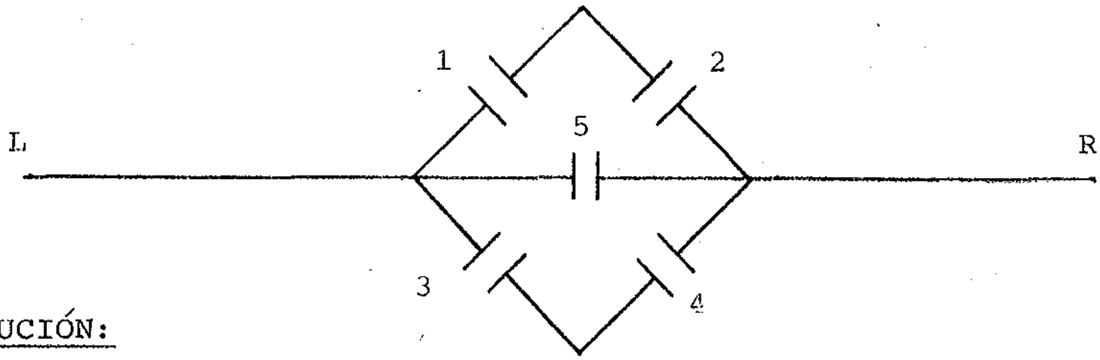
$P(\text{fallan ambos}) = 1.6x10^{-5}$

$P(\text{haya suministro}) = 1 - P(\text{no haya suministro}) = 1 - P(\text{fallan ambos})$

$$= 1 - 1.6x10^{-5}$$

$$= 0.999984$$

9. Suponga que la probabilidad de que cada relevador esté cerrado es p y que todos los relevadores funcionan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que exista corriente entre L y R ?



SOLUCIÓN:

Sean A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 los eventos la corriente (o el flujo) pasa por el relevador i, (i=1,2,...5 respectivamente) es decir que este cerrado el relevador i.

$A_1 \cap A_2$, A_5, $A_3 \cap A_4$ son los eventos simples que constituyen el evento compuesto $B = (A_1 \cap A_2) \cup A_5 \cup (A_3 \cap A_4)$ la corriente pasa de L a R.

No son eventos excluyentes porque pueden ocurrir simultáneamente.

Por la fórmula para la probabilidad de la unión de 3 eventos no excluyentes, se tiene

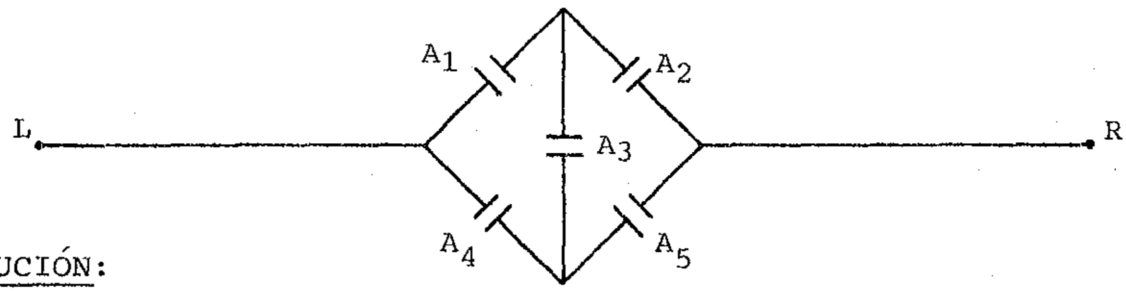
$$P(B) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_5) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_5) - p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$- P(A_5 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_3 \cap A_4)$$

y por independencia de los relevadores

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_5) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_5) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$
$$- P(A_5)P(A_3)P(A_4) + P(A_1)P(A_2)P(A_5)P(A_3)P(A_4)$$

de donde $P(B) = p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 = p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5$

10. Suponga en la gráfica siguiente que la probabilidad de que cada relevador esté cerrado es P y que cada relevador está abierto o cerrado independientemente de cualquier otro relevador. Encuentre la probabilidad del paso de la corriente de L a R.



SOLUCIÓN:

Con la misma notación que en el problema anterior.

Se desea calcular la probabilidad del evento siguiente

$B=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3\cap A_5) \cup (A_4\cap A_5) \cup (A_4\cap A_3\cap A_2)$

Usando la fórmula de probabilidad de la unión de 4 eventos no excluyentes se obtiene

$P(B)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3\cap A_5)+P(A_4\cap A_5)+P(A_4\cap A_3\cap A_2)$
$-P((A_1\cap A_2)\cap(A_1\cap A_3\cap A_5))-P((A_1\cap A_2)\cap(A_4\cap A_5))-P((A_1\cap A_2)\cap(A_4\cap A_3\cap A_2))$
$-P((A_1\cap A_3\cap A_5)\cap(A_4\cap A_5))-P((A_1\cap A_3\cap A_5)\cap(A_4\cap A_3\cap A_2))-P((A_4\cap A_5)\cap(A_4\cap A_3\cap A_2))$
$+P((A_1\cap A_2)\cap(A_1\cap A_3\cap A_5)\cap(A_4\cap A_5))+P((A_1\cap A_2)\cap(A_1\cap A_3\cap A_5)\cap(A_4\cap A_3\cap A_2))+$
$+P((A_1\cap A_3\cap A_5)\cap(A_4\cap A_5)\cap(A_4\cap A_3\cap A_2))+P((A_1\cap A_2)\cap(A_4\cap A_5)\cap(A_4\cap A_3\cap A_2))$
$-P((A_1\cap A_2)\cap(A_1\cap A_3\cap A_5)\cap(A_4\cap A_5)\cap(A_4\cap A_3\cap A_2))$

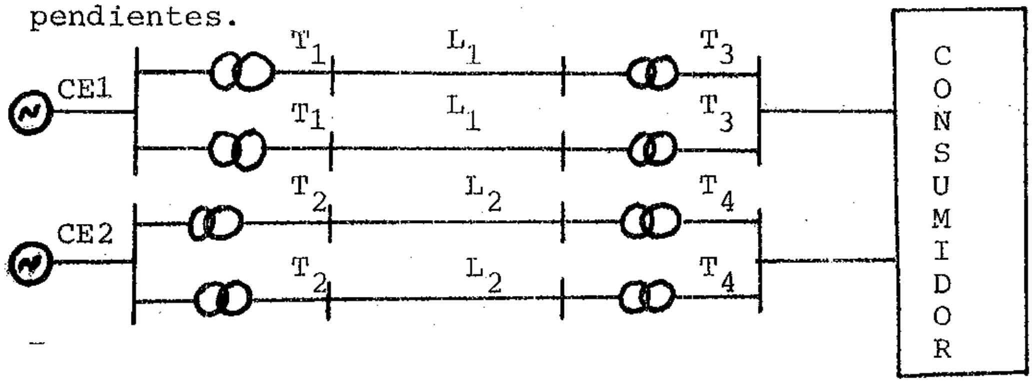
Por independencia del funcionamiento de los relevadores

$P(A_i\cap A_j\cap A_k) = P(A_i)\ P(A_j)\ P(A_k) \quad \forall\ i,j,k,$ etc.

de donde $P(B)=p^2+p^3+p^2+p^3-p^4-p^4-p^4-p^4-p^5-p^4+p^5+p^5+p^5+p^5 - p^5$

esto es, $P(B)= 2p^2 +2P^3-5p^4+2p^5$

11. Una fábrica metalúrgica recibe energía eléctrica por cuatro circuitos de líneas de transporte de energía desde dos centrales eléctricas CE1 y CE2. Al principio y al final de cada línea se han instalado dos transformadores elevadores y reductores. Cada transformador T1 y T2 elevador y T3 y T4 reductor, así como cada circuito de la línea pueden transmitir la mitad de la potencia necesaria a la fábrica. Los sucesos de fallo de todos los elementos de este sistema de transmisión de energía eléctrica son independientes.



¿Determinar la probabilidad de que la fábrica reciba toda la potencia, si las probabilidades de fallo de los transformadores de las subestaciones T1, T2, T3 y T4 y de cada circuito L1 y L2 son respectivamente iguales a q_{T1}, q_{T2}, q_{T3}, q_{T4}, q_{L1} y q_{L2}.

SOLUCIÓN:

Para que funcione el sistema si la central eléctrica funciona, se requiere que por lo menos dos líneas funcionen. La línea 1 funciona sólo si el transformador elevador, la línea de transmisión y el transformador reductor funcionan i.e.

$$(1-q_{T1})\ (1-q_{L1})\ (1-q_{T3}) = 1-q_{T1}-q_{L1}-q_{T3}+q_{L1}\ q_{T1}+q_{L1}\ q_{T3}+$$
$$+q_{T1}\ q_{T3}-q_{T1}q_{L1}q_{T3}$$

La primera línea no funcionará con probabilidad q_1

$$q_1 = 1-(1-q_{T1}-q_{L1}-q_{T3}+q_{T1}q_{T3}+q_{L1}q_{T1}+q_{L1}q_{T3}-q_{T1}q_{L1}q_{T3})$$
$$= q_{T1}+q_{L1}+q_{T3}-q_{T1}q_{T3}-q_{L1}q_{T1}-q_{L1}q_{T3}+q_{T1}q_{L1}q_{T3}$$

Análogamente para las líneas II, III y IV con $q_I = q_{II}$, $q_{III} = q_{IV}$

El circuito no funcionará si fallan tres o cuatro líneas entonces la probabilidad de que el sistema funcione es:

$$P = 1-(q_I^2\ q_{III}^2 + q_I^2\ q_{III}\ (1-q_{III})$$

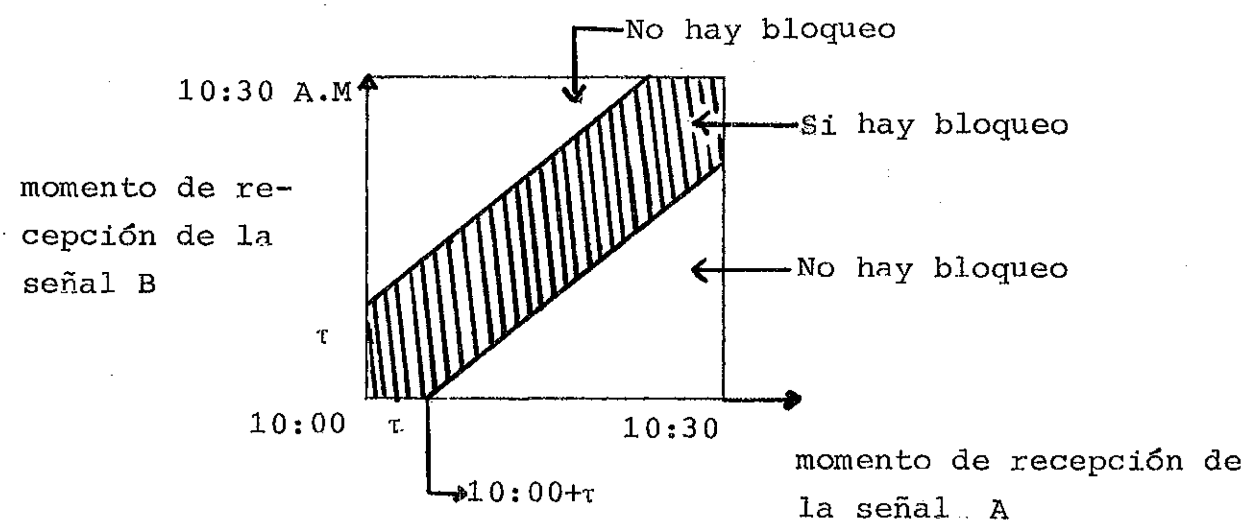
$$+ q_I^2\ q_{III}\ (1-q_{III})$$

$$+ q_I\ (1-q_I)\ q_{III}^2$$

$$+ q_I\ (1-q_I)\ q_{III}^2)$$

12. Es igualmente probable que dos señales sean detectadas por un receptor en cualquier instante desde las 10 horas hasta las 10:30 horas. El receptor se bloqueará si la diferencia de tiempo de llegada entre las dos señales es menor que τ. Encuentre la probabilidad de que el receptor sea bloqueado.

SOLUCIÓN:



Si la señal A llega a las 10:00 + τ o después y, la B no ha llegado entonces no hay bloqueo.

El espacio muestral es todo el cuadrado A = 30x30 = 900 min^2.

La probabilidad de no bloqueo es el valor del área no rayada entre el valor del área total:

$$P = \frac{A'}{A} = \frac{\text{área de no bloqueo}}{900\ min^2}$$

$$A' = 2\left(\frac{(30-\tau)(30-\tau)}{2}\right) = \left(\frac{900-60\tau+\tau^2}{2}\right) = (30-\tau)^2$$

$$\therefore \frac{(30-\tau)^2}{30^2} = P$$

13. Un tirador pega a su blanco con probabilidad 0.4. Dispara cuatro veces.

i) Determinar los elementos del evento A "el hombre pega al blanco exactamente dos veces, y hallar P(A)

ii) Hallar la probabilidad de que el hombre pegue al blanco al menos una vez.

iii) Hallar la probabilidad de que el hombre pegue al blanco exactamente dos veces, dado que ha pegado al blanco al menos una vez.

SOLUCIÓN:

i) $A=\left\{ (PPNN), (PNPN), (PNNP), (NPPN), (NPNP), (NNPP) \right\}$

donde: P: pega al blanco

N: no pega al blanco

$$P(A) = P\left\{(PPNN)\right\} + P\left\{(PNPN)\right\} + \ldots + P\left\{(NNPP)\right\} = 0.3456$$

ii) Sea B el evento pega al blanco al menos una vez, así $P(B) = 1-(0.64)^4$

iii) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{0.3456}{0.8704} = 0.39700588$

14. Una caja contiene 10 circuitos integrados, 3 de los cuales son defectuosos. Si se escogen dos al azar encuentre la probabilidad de que ninguno sea defectuoso, suponiendo

a) Que la selección se hace sin reemplazo

b) Que la selección se hace con reemplazo

SOLUCIÓN:

Sean A y B los eventos siguientes:

A: El primer circuito integrado es no defectuoso

B: El segundo circuito integrado es no defectuoso

a) Si se seleccionan sin reemplazo, se tiene:

$P(A) = \frac{7}{10}$ (ya que 7 de los 10 son no defectuosos)

$P(B/A) = \frac{6}{9}$ (ya que se supone que se extrajo un primer circuito integrado no defectuoso).

así, $P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$

$= 0.47$

b) Si se seleccionan con reemplazo

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10}$$

$$= 0.49$$

15. Una caja contiene 2 bolas negras, 3 bolas blancas y 4 bolas rojas. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazo,

a) ¿Cual es la probabilidad de que la primera bola sea negra y la segunda sea blanca?

b) ¿Cual es la probabilidad de obtener una bola negra y una bola blanca?

SOLUCIÓN:

a) La primera negra y la segunda blanca

$$P(N \cap B) = P(N)\ P(B/N)$$
$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

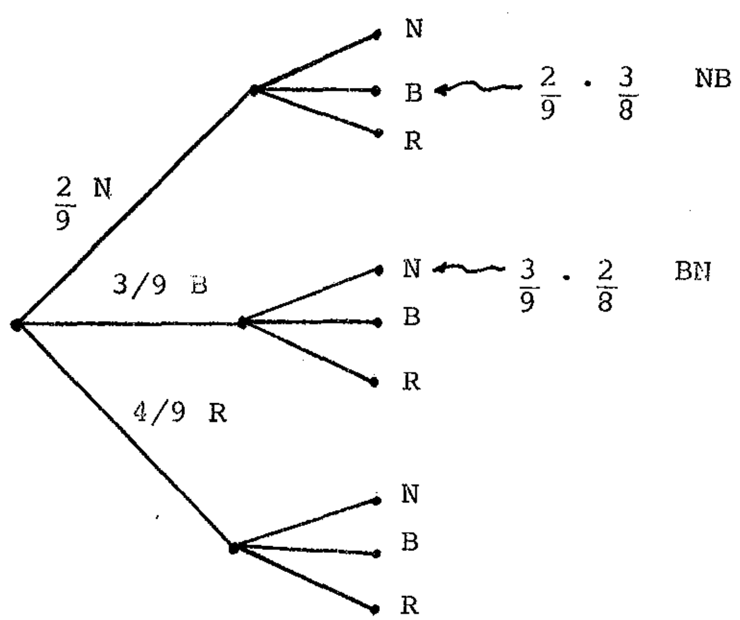
b) Una bola negra y una bola blanca

Se pueden extraer de dos formas

- Primero N y después B $\longrightarrow P(N \cap B) = \frac{1}{12}$ (ver inciso A)
- Primero B y después N $\longrightarrow P(B \cap N) = P(B)\ P(N/B)$

Como los eventos anteriores son excluyentes tenemos $= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{12}$

$$P(\text{ Bola Negra y Bola Blanca}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$



16. Una urna contiene 4 bolas numeradas 1,2,3,4, respectivamente. Se seleccionan 2 bolas sin reemplazo. Sean los eventos:

A: La suma de los números de las bolas es 5

B_i: La primera bola seleccionada tiene el número i, i=1,2,3,4

a). Calcular $P(A/B_i)$

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2)(4,1)\}$$

Si el primer número es i sólo hay 3 posibilidades para el otro, y en una de estas posibilidades la suma de los 2 números es 5, por lo tanto.

$$\boxed{P(A/B_i) = \frac{1}{3}}$$

b). Calcular $P(B_i/A)$

$$P(B_i/A) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A/B_i)\ P(B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{4})}{\frac{4}{12}}$$

$$\boxed{P(B_i/A) = \frac{1}{4}}$$

17. Considérese un tramo de 100Km. en una carretera y supóngase que las condiciones del pavimento y el volúmen de tráfico son uniformes en esos 100Kms. asi los accidentes son igualmente probables en cualquier punto de este tramo.

Hallar la probabilidad de que un accidente haya ocurrido antes del Km 30 si se sabe que sucedió en el tramo comprendido entre los kilómetros 20 y 60

SOLUCIÓN:

Sea A: ocurre un accidente en el tramo (0,30)

B: ocurre un accidente en el tramo (20,60)

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{10}{100}}{\frac{40}{100}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

18. En una Universidad se imparten carreras en tres áreas: Ciencias, Ingeniería y Administración.

La matrícula por sexo y área es:

	Ciencias	Ingeniería	Administración	Total
Masculino	250	350	200	800
Femenino	100	50	50	200
T O T A L	350	400	250	1000

Si se selecciona al azar un estudiante y se definen los siguientes eventos:

S_1: El estudiante seleccionado es de sexo masculino

S_2: El estudiante seleccionado es de sexo femenino

C_1: El estudiante seleccionado estudia una carrera de ciencias.

C_2: El estudiante seleccionado estudia una carrera de Ingeniería.

C_3: El estudiante seleccionado estudia una carrera de Administración.

Hallar las siguientes probabilidades

a). $P(C_j / S_i)$ $\quad i= 1,2,; \quad j= 1,2,3.$

b). $P(S_i / C_j)$

Utilizando la siguiente tabla se pueden calcular las probabilidades de a) y b)

	C_1	C_2	C_3	total.
S_1	0.25	0.35	0.20	0.80
S_2	0.10	0.05	0.05	0.20
Total	0.35	0.40	0.25	1.00

Ejemplo

$$P(S_1 / C_1) = \frac{.25}{.35}$$

$$= 0.714.$$

19. Supóngase que la ciencia médica tiene una prueba para diagnosticar el cáncer. Esta prueba da un diagnóstico correcto al 95%, tanto para los que tienen como para - los que no lo tienen. Si el 0.5% de la población actual tiene cancer. Hallar la probabilidad de que una persona tenga cáncer, si la prueba dice que lo tiene.

SOLUCIÓN:

Se definen los eventos

A_1: La persona examinada tiene cáncer

A_2: La persona examinada no tiene cáncer

E: La prueba dice que tiene cáncer

$$P(A_1/E) = \frac{P(E/A_1)\ P(A_1)}{P(E/A_1)P(A_1)+P(E/A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{.95\ (.005)}{.95\ (.005) + .05\ (0.995)}$$

$$= 0.087$$

20. Tres firmas surten de transistores NPN a un fabricante de equipo de telemetría. Se supone que todos estan hechos de acuerdo a las mismas especificaciones. Sin embargo, el fabricante ha probado durante varios años cada uno de los dos parámetros de calidad de los transistores, y los registros indican lo siguiente, donde un transistor es declarado defectuoso si uno de los dos parámetros está fuera de especificación.

compañía	Fracción defectuosa	Fracción surtida por
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

El fabricante paró su prueba debido a los costos y puede ser razonable suponer que las fracciones defectuosas y el inventario mixto son los mismos que durante el período en que se estuvieron guardando los registros. El director de la fábrica selecciona aleatoriamente un transistor, lo lleva al departamento de prueba, y encuentra que este es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido envíado por la compañía i (i=1,2,3)?.

SOLUCIÓN:

Sean los eventos

A: el transistor es defectuoso

B_i: el transistor fue envíado por la compañía i.

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\ P(A/B_i)}{P(B_1)\ P(A/B_1)\ +\ P(B_2)\ P(A/B_2)\ +\ P(B_3)\ P(A/B_3)}$$

Si $B_i = B_3$

$$P(B_3/A)=\frac{.05(.03)}{.15(.02)\ +\ .8(.01)\ +\ .05(.03)}=\frac{3}{25}.$$

21. Dos de tres elementos de una máquina que funcionan independientemente fallaron. Hallar la probabilidad de que hayan fallado los elementos primero y segundo, si las probabilidades de fallo de los elementos primero, segundo y tercero son respectivamente $P_1=0.2$, $P_2=0.4$ y $P_3=0.3$.

SOLUCIÓN:

Sean los eventos

A: fallaron 2 elementos

B_1: fallaron los elementos 1 y 2 y el elemento 3 no falló

B_2: fallaron los elementos 1 y 3 y el segundo no falló

B_3: fallaron los elementos 2 y 3 y el primero no falló

Lo que se pide encontrar es:

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)\ P(A / B_1)}{P(B_1)\ P(A/B_1) + P(B_2)\ P(A/B_2) + P(B_3)\ P(A/B_3)}$$

$$P(B_1) = P_1 P_2 q_3$$

$$q_i = 1 - P_i$$

$$P(B_2) = P_1 q_2 P_3$$

$$P(B_3) = q_1 P_2 P_3$$

PROBLEMAS.

1. Una persona tiene un despertador que sonará a la hora puesta con una probabilidad de 0.7. Si suena lo despertará con una probabilidad de 0.8. Si no, despertará a tiempo para tomar su primera clase con una probabilidad de 0.3 ¿Cuál es la probabilidad de que tome su primera clase?

2. Por la noche dos coches se aproximan uno al otro en una autopista. Si ninguno de los dos choferes está dormido, ambos pasarán a salvo con una probabilidad de 0.999. Dado que uno puede estar adormecido con una probabilidad de 0.1, la probabilidad de que ambos estén adormecidos es de 0.01. Si sólo el chofer A está adormecido, pasarán a salvo con una probabilidad de 0.7. Si sólo el chofer B está adormecido, pasarán a salvo con una probabilidad de 0.8. Si ambos están adormecidos, pasarán sin peligro con una probabilidad de 0.4. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen a salvo?.

3. Un amplificador operará adecuadamente por 10000 horas si cada uno de sus siete transistores y cinco tubos de vacío operan adecuadamente durante el período de tiempo especificado. Para cada transistor la probabilidad es al menos 0.99 de que funcione bien por el período de tiempo señalado y para cada tubo la probabilidad de que funcione correctamente es al menos de 0.98.

   Demuestre que la probabilidad es razonablemente grande para el evento de que el amplificador funcione adecuadamente por 10000 horas.

VARIABLES ALEATORIAS

Y

FUNCIONES DE PROBABILIDAD

1. Sea la Compañía de Seguros "Alí Babá".

Algunas variables aleatorias que puéden ser de interés son:

a). W= número de asegurados en un año dado.

W es una variable aleatoria discreta y los valores que puede tomar son: 0,1,2,3,...

b). X= número de sumas aseguradas mayores de $500,000 que tiene que pagar la compañía los próximos 2 años.

X es también una v.a. discreta y puede tomar los valores 0,1,2,3,...

c). Y= Ganancia (en pesos y centavos) esperada para el próximo bimestre.

¿Es Y contínua?. ¿Por qué?..

Define por lo menos otras 3 variables aleatorias que denoten una característica de la compañía de seguros mencionada.

2. Considérese que el día laborable d se observa el funcionamiento del conmutador telefónico de la UAM-A.

En este experimento se pueden definir las siguientes variables aleatorias.

a). Sea X= número de llamadas que se reciben en el conmutador entre las 10 Hrs. y las 12 Hrs.

Los valores que puede tomar X son: 0,1,2,3, por lo que X es una v.a. discreta.

b). Y es el tiempo que pasa desde las 8 Hrs. hasta que se recibe la primera llamada.

Y es una v.a. contínua, puede tomar cualquier valor que sea mayor o igual a cero y el conjunto de números mayores que cero es infinito no numerable.

c). Z= número de llamadas que no se pasan por estar ocupada la extensión solicitada.

Z es una v.a. discreta ya que el conjunto de valores que puede tomar es numerable.

$$\{0,1,2,3,...\}$$

Define por lo menos otras 2 variables aleatorias.

3. Sea X una variable aleatoria discreta. Determinar K tal que la función $P_X(x) = \frac{K}{x}$

$X = 1,2,3,4$, es la función de probabilidad de X. Encontrar

a). El valor de K.

b). La función de distribución de X.

c). $P(1 < X \leq 3)$

SOLUCIÓN:

Por definición

a). $$\sum_{x=1}^{4} \frac{K}{x} = 1$$

$$\sum_{x=1}^{4} \frac{K}{x} = \frac{K}{1} + \frac{K}{2} + \frac{K}{3} + \frac{K}{4}$$

$$= \frac{25\ K}{12}$$

de donde se obtiene

$$K = \frac{12}{25}$$

Así.

$$P_X(x) = \frac{12}{25x} \qquad X = 1,2,3,4$$

$$= 0 \qquad \text{otro caso.}$$

b). $F_X(t) = 0 \qquad t < 1$

$$= \frac{12}{25} \qquad 1 \leq t < 2$$

$$= \frac{18}{25} \qquad 2 \leq t < 3$$

$$= \frac{22}{25} \qquad 3 \leq t < 4$$

$$= 1 \qquad t \geq 4$$

c). $P(1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1)$

$$= \frac{6}{15}$$

4. Se encontró que la variable aleatoria X, que representa el tiempo en minutos, entre dos llegadas sucesivas a una estación de servicio tiene como función de densidad de probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} K \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & X > 0, \quad K \in R^+ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Encuentra

a).- El valor de K.

b).- La función de distribución de X

c).- $P(2 < X < 6)$

d).- $P(X < 8)$

SOLUCIÓN:

a).- Por definición se tiene que

$$\int_0^{\infty} K \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx = 1$$

así

$$K \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx = -2K \exp\left(-\frac{X}{2}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= 2K$$

de donde:

$$K = \frac{1}{2}$$

b).- $F_X(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) dt$

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \qquad x > 0$$

$$= 0 \qquad \text{otro caso}$$

c).- $P(2<X<6) = \frac{1}{2} \int_2^{6} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx$

$$= F(6) - F(2)$$

$$= \left[1 - \exp(-3)\right] - \left[1 - \exp(-1)\right]$$

$$= 0.3181$$

d).- $P(x<8) = F_X(8)$

$= 1- \exp(-4)$

$= 0.9817$

5. Se sabe que en una moneda sale águila tres veces más a menudo que sol. Esta moneda se lanza tres veces. Sea X el número de águilas que aparecen. Establecer la función de probabilidad de X y también la función de distribución.

SOLUCIÓN:

$$\Omega = \left\{ (A,A,A),\ (A,A,S),(A,S,A),\ (S,A,A),\ (A,S,S),\ (S,A,S),\ (S,S,A),(S,S,S) \right\}$$

El espacio muestral no es equiprobable dado que en cada lanzamiento no se tiene la misma probabilidad de que caiga águila o sol.

Suponiendo que los lanzamientos son independientes, considerando los eventos A_i sale águila en el i-ésimo lanzamiento, $i= 1,2,3$ y S_i sale sol en el i-ésimo lanzamiento, $i= 1,2,3$

Con $P(A_i)= \frac{3}{4}$, $P(S_i)= \frac{1}{4}$ $i= 1,2,3$

Se tiene

$(A,A,A)= A_1 \cap A_2 \cap A_3$ de donde $P\{(A,A,A)\} = (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$

$(A,A,S)= A_1 \cap A_2 \cap S_3$ de donde $P\{(A,A,S)\} = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{64}$

$(A,S,A)= A_1 \cap S_2 \cap A_3$ de donde $P\{(A,S,A)\} = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{64}$

$(S,A,A)= S_1 \cap A_2 \cap A_3$ de donde $P\{(S,A,A)\} = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{64}$

$(A,S,S)= A_1 \cap S_2 \cap S_3$ de donde $P\{(A,S,S)\} = (\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4}) = \frac{3}{64}$

$(S,A,S)= S_1 \cap A_2 \cap S_3$ de donde $P\{(S,A,S)\} = (\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4}) = \frac{3}{64}$

$(S,S,A)= S_1 \cap S_2 \cap A_3$ de donde $P\{(S,S,A)\} = (\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4}) = \frac{3}{64}$

$(S,S,S)= S_1 \cap S_2 \cap S_3$ de donde $P\{(S,S,S)\} = (\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$

el evento X=0 es $\left\{ (S,S,S) \right\}$ de donde $P\left\{ X=0 \right\} = \frac{1}{64}$

evento X=1 es $\left\{ (S,S,A),(S,A,S),(A,S,S) \right\}$ de donde $P\left[X=1 \right] = \frac{3}{64} +$

$$\frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

X=2 es $\left\{ (A,A,S),(A,S,A),(S,A,A) \right\}$ de donde $P\left[X=2 \right] = \frac{9}{64} +$

$$\frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$$

X=3 es $\left\{ (A,A,A) \right\}$ de donde $P\left[X=3 \right] = \frac{27}{64}$

Es decir la función de probabilidad es en este caso

$$P\left\{ X=0 \right\} = \frac{1}{64}$$

$$P\left\{ X=1 \right\} = \frac{9}{64}$$

$$P\left\{ X=2 \right\} = \frac{27}{64}$$

$$P\left\{ X=3 \right\} = \frac{27}{64}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{64} & \text{si } X=0 \\ \frac{9}{64} & \text{si } X=1 \\ \frac{27}{64} & \text{si } X=2,3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y la función de distribución

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{64} & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ \frac{10}{64} & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ \frac{37}{64} & \text{si} \quad 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

6. Se lanzan dos dados. Sea X el total de puntos en las caras superiores. Encuentre la expresión general para f(x)

<u>SOLUCIÓN</u>:

X=x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\Sigma=1$

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	9	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

$f(x) = (6 - |x-7|)/36 \; ; \; x=2,..,12$

7. Se lanzan cuatro monedas. Sea X= número de soles

Y= número de águilas

Encuentre la distribución de:

a) $X + Y$ b) $X Y$

<u>SOLUCIÓN:</u>

a)

$P(X + Y = 0) = 0$

$P(X + Y = 1) = 0$

$P(X + Y = 2) = 0$

$P(X + Y = 3) = 0$

$P(X + Y = 4) = 1$

b)

$P(XY = 0) = P(X=0 , Y = 4) + P(X = 4, Y = 0) = 2(1/2)^4$

$P(XY = 1) = 0$

$P(XY = 2) = 0$

$P(XY = 3) = P(X=1 , Y = 3) + P(X = 3, Y = 1) = 2(1/2)^4(2)$

$P(XY = 4) = P(X=2 , Y = 2) = 6(1/2)^4$

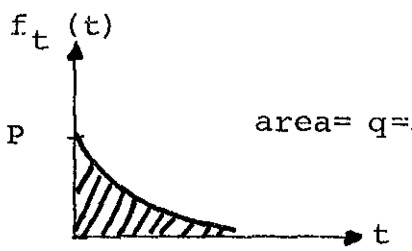
$P(XY = 5) = 0$

$P(XY = 6) = 0$, etc.

8. Se escoge al azar un foco dentro de un lote de focos en buen estado o fundidos. Si se define como variable aleatoria el tiempo de vida T de dicho foco, tendremos una repartición de probabilidades del tipo indicado en la figura. Calcule la probabilidad de que el tiempo de vida sea menor o igual que t .

SOLUCIÓN:

p= probabilidad de que el foco elegido esté fundido.



$f(t)=$ densidad= $\lambda e^{-\lambda t}$

T es, en este caso, una variable aleatoria mixta.

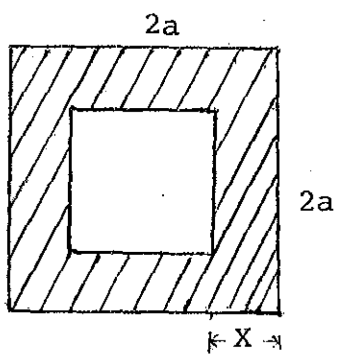
$P(T=0) = p$

$$P\left[\,T \leq t\,\right] = (1-p)\int_0^t f(x)dx$$

$$= (1-p)\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= (1-p)(1-e^{-\lambda t})$$

9. Considere el problema de la repartición de cargas en los pisos de los edificios, de gran interés para el diseño estructural. Si se admite que una carga centrada dada, puede ser aplicada en cualquier punto de un área cuadrada, se puede definir como variable aleatoria la distancia X de la carga al borde más cercano. Esta variable es contínua: Obtener la densidad de probabilidad.



$$F_X(x) = P\left\{ X \leq x \right\} = \frac{\text{Area Rayada}}{\text{Area Total}}$$

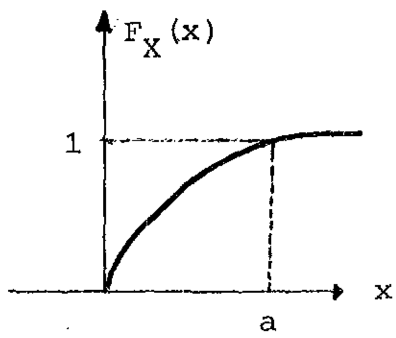
$$= \frac{4a^2 - (2a-2x)^2}{4a^2}$$

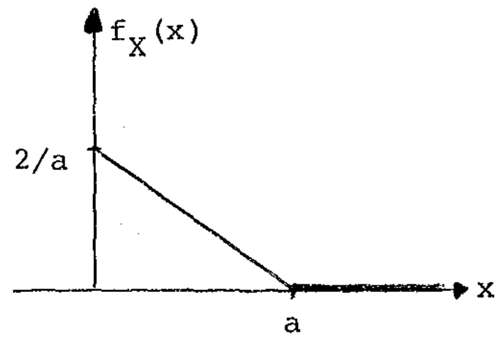
$$= 1 - \frac{(a-x)^2}{a^2}$$

para $0 \leq x \leq a$

La densidad de probabilidad es entonces

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{2(a-x)}{a^2} \qquad 0 \leq x \leq a$$





10. Supóngase que la variable aleatoria X tiene función de densidad de probabilidad $f(X)= e^{-x}$, $x > 0$. Encontrar las funciones de densidad de probabilidad de las siguientes variables aleatorias:

a) $Y= X^3$ b) $Z= 3/(X+1)^2$

SOLUCIÓN :

a) Consideramos la función de distribución $G(Y)$ de la variable aleatoria $Y=X^3$

$$G(Y) = P\left[Y \leq y\right]$$

$$= P\left[X^3 \leq y\right]$$

$$= P\left[X \leq \sqrt[3]{y}\right]$$

de donde $G_Y(y) = F_X(\sqrt[3]{y})$

derivando respecto a Y se obtiene la función de densidad $g_Y(y)$, esto es:

$$g_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} f_X(\sqrt[3]{y})$$

como $f(x)= e^{-x}$, $x > 0$, obtenemos $g_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} e^{-\sqrt[3]{y}}$, $y > 0$

b) Considérese la función de distribución de la variable aleatoria $Z=3/(X+1)^2$

$$G_Z(z) = P\left[Z \leq z\right]$$

$$= P\left[\frac{3}{(X+1)^2} \leq z\right]$$

$$= P\left[(X+1)^2 \geq \frac{3}{z}\right], \quad z > 0$$

$$= P\left[\left(-\sqrt{\frac{3}{z}} - 1 \geq X\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{z}} - 1 \leq X\right)\right]$$

$$= P\left[X \leq -1 - \sqrt{\frac{3}{z}}\right] + P\left[X \geq -1 + \sqrt{\frac{3}{z}}\right]$$

$$= F_X\left(-1 - \sqrt{\frac{3}{z}}\right) + \left(1 - F_X\left(-1 + \sqrt{\frac{3}{z}}\right)\right)$$

derivando respecto a z para obtener la función de densidad

$g_Z(z)$, nos da:

$$g_Z(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{z^3}}\, f_X\left(-1 - \sqrt{\frac{3}{z}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{z^3}}\, f_X\left(-1 + \sqrt{\frac{3}{z}}\right)$$

Sustituyendo $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$, se obtiene:

$$g_Z(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{z^3}}\left(e^{-\left(-1 - \sqrt{\frac{3}{z}}\right)} - e^{-\left(-1 + \sqrt{\frac{3}{z}}\right)}\right) \quad z > 0$$

ALGUNAS DISTRIBUCIONES ESTANDAR

1. Supóngase que el 5 por ciento de los artículos que salen de una línea de producción son defectuosos. Se escogen 10 de tales artículos y se inspeccionan. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren a lo más dos defectuosos?

SOLUCIÓN:

Sea X el número de artículos defectuosos inspeccionados

$X \sim B(10, 0.05)$

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{10}{x} (0.05)^{x} (0.95)^{10-x}$$

$$P(X \leq 2) = 0.9884964$$

2. Un corredor de bolsa, cada mañana llama a 20 de sus más importantes clientes, si la probabilidad de efectuar una transacción, como resultado de estas llamadas, es de 1/3. Encuentra la probabilidad de que:

a) Haga por lo menos 18 transacciones.
b) Haga a lo más 2 transacciones.
c) Haga exactamente 3 transacciones.

SOLUCIÓN:

Sea X = número de transacciones que hace.
X es una variable aleatoria binomial

a) $$P(x \geq 18) = \sum_{x=18}^{20} \binom{20}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{20-x}$$

$$\approx 0.0000002$$

b) $$P(x < 3) = \sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{20-x}$$

$$\approx 0.0175$$

c) $$P(x=3) = \binom{20}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{20-3}$$

$$\approx 0.0428$$

3. Una fábrica produce diariamente 10 recipientes de vidrio. Se puede suponer que hay una probabilidad constante p = 0.1 de producir uno defectuoso. Antes de que estos recipientes se almacenen son inspeccionados y los defectuosos puestos aparte. Supongamos que hay una probabilidad constante r = 0.1 de que un recipiente defectuoso sea mal clasificado. Sea X igual al número de recipientes clasificados como defectuosos al término de un día de producción. (Suponemos que todos los recipientes que se fabrican en un día se inspeccionan ese mismo día).

a) Calcular $P(x=3)$ y $P(x > 3)$.

SOLUCIÓN:

El número de recipientes clasificados como defectuosos es el número de recipientes defectuosos y que son bien clasificados. Es decir, que cumplen la condición de ser defectuosos y que se detecte esta condición. La probabilidad de que esto suceda para un artículo es: $0.1(0.9) = 0.09$; como la probabilidad anterior es constante para cada recipiente y las clasificaciones de estos son independientes, se tiene que $X \sim B(10, 0.09)$, de donde:

$$P(x=3) = \binom{10}{3} (0.09)^3 (0.91)^7 = .041063$$

$$P(x > 3) = \sum_{x=4}^{10} \binom{10}{x} (0.09)^x (0.91)^{10-x}$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} (0.09)^x (0.91)^{10\ x}$$

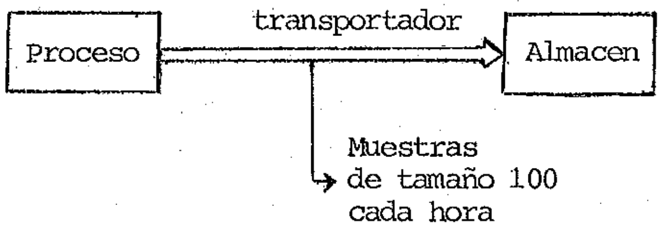
$$= 1 - 0.9911663 = 0.0088337$$

b) Obtener una expresión para $P(x=k)$

SOLUCIÓN:

$$P(x=k) = \binom{10}{k} (0.09)^k (0.91)^{10-k}, \quad k=0,1,2,\ldots,10$$

4. Un proceso representado esquemáticamente por la siguiente figura:



produce miles de partes por día. En promedio, el 1% de las partes son defectuosas y este promedio no varía con el tiempo. Cada hora se selecciona del transportador una muestra aleatoria de tamaño 100 se observan varias características y se mide cada una de las partes; el inspector clasifica las piezas como buenas o defectuosas. Si se encuentran más de 2 defectuosas el proceso se para, encuentra la probabilidad de que se tenga que parar el proceso al analizar una muestra cualquiera.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Si x es el número de partes defectuosas en una muestra, entonces x tiene función de densidad de probabilidad binominal con parámetros n=100 y p =0.01. Lo que se pide encontrar es:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{100}{x} (0.01)^{x} (.99)^{100-x}$$

$$= 1 - (.99)^{100} + 100 (.01)^{1} (.99)^{99} + 4950 (.01)^{2} (0.99)^{98} \approx .08$$

5. Se extrae una muestra aleatoria tamaño 3 con reemplazo de un grupo de 12 radios que contienen 5 defectuosos.

Encuentre las funciones de probabilidad y de distribución del número de radios defectuosos en la muestra.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Sea X: Número de radios defectuosos en la muestra

$$P(X = x) = f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{5}{12}\right)^{3-x}\left(\frac{7}{12}\right)^{x}$$

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{3}{0}\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(\frac{7}{12}\right)^{0} = \frac{3!}{0!\ 3!}\left(\frac{5}{12}\right)^{3} = \left(\frac{5}{12}\right)^{3} = \frac{125}{1728}$$

$$P(X = 1) = f(1) = \binom{3}{1}\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(\frac{7}{12}\right) = 3\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{525}{1728}$$

$$P(X = 2) = f(2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right)^{2} = 3\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right)^{2} = \frac{735}{1728}$$

$$P(X = 3) = f(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{7}{12}\right)^{3} = \left(\frac{7}{12}\right)^{3} = \frac{343}{1728}$$

$$\sum_{X=0}^{3} f(x) = \frac{125}{1728} + \frac{525}{1728} + \frac{735}{1728} + \frac{343}{1728} = \frac{1728}{1728} = 1$$

La función de distribución es:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{125}{1728} & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{650}{1728} & 1 \le t < 2 \\ \dfrac{1385}{1728} & 2 \le t < 3 \\ 1 & t \ge 3 \end{cases}$$

6. Una bolsa contiene 10 focos, de los cuales 8 estan en buen estado. Si se escogen 5 focos, ¿Cuál es la función de probabilidad para el número de focos que sirven? ¿Para el número de los que no sirven?.

SOLUCIÓN:

Sea X el número de focos que sirven, suponiendo que la extracción de los focos es sin reemplazos y se tiene la función de probabilidad

$$P_X(x) = \frac{\binom{8}{x}\binom{2}{5-x}}{\binom{10}{5}}, \qquad x=3,4,5$$

Sea Y el número de focos que no sirven. La función de probabilidad de Y es:

$$P_Y(y) = \frac{\binom{8}{5-2}\binom{2}{y}}{\binom{10}{5}}, \quad y = 0,1,2$$

7. Un conmutador telefónico atiende en promedio 600 llamadas durante una hora de aglomeración. El conmutador puede hacer un máximo de 20 conexiones por minuto. Encuentra la probabilidad de que el conmutador quede rebasado durante un minuto dado.

SOLUCIÓN:

Se pide encontrar la probabilidad de que haya más de 20 llamadas durante un minuto dado.

Si x= número de llamadas en un minuto, x es una variable aleatoria con función de probabilidad de Poisson con parámetro $\lambda = \frac{600}{60} = 10$, y

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{20} \frac{10^x}{x!} e^{-10}$$

8. Supóngase que la concentración de un cierto contaminante está distribuido uniformemente en el rango de 4 a 20 ppm (partes por millón). Si una concentración de más de 15 ppm se considera tóxica ¿Cuál es la probabilidad de que un espécimen tenga un nivel de concentración tóxico?.

SOLUCIÓN:

Sea X: nivel de concentración

$$f(x) = \frac{1}{20-4} \qquad 4 \leq x \leq 20$$

$$= 0 \qquad \text{otro caso}$$

$$P\left[X > 15 \right] = \frac{1}{16}\int_{15}^{20} dx = \frac{20-15}{16}$$

$$= 0.3125$$

9. Un voceador vende periódicos en una esquina. Los periódicos que vende son eventos de un proceso de Poisson con parámetro $\lambda = 50$ por hora. Si alguién acaba de comprarle un periódico, ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran al menos 2 minutos antes que venda otro?

Si ya han transcurrido 5 minutos desde la última venta, ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran al menos 2 minutos más para su siguiente venta?

SOLUCIÓN : En un proceso de Poisson, el tiempo transcurrido entre dos eventos sucesivos es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\theta = \frac{1}{\lambda}$, en este caso $\theta = \frac{1}{50}$ horas/evento $= \frac{60}{50}$ minutos/evento.

Si X es el tiempo transcurrido en minutos desde la venta del último periódico, se tiene:

$$P(X \geq 2) = \int_2^\infty \frac{60}{50} e^{-\frac{60}{50}x} dx$$

$$= 1 - \int_0^2 \frac{60}{50} \exp\left(-\frac{60}{50}x\right) dx$$

$$= 1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{120}{50}\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{120}{50}\right) = .090718$$

Por la propiedad de ausencia de memoria de la distribución exponencial, se tiene:

$$P(x \geq 7 / x \geq 5) = P(x \geq 2) = 0.090718$$

10. Un sistema consiste de dos componentes independientes A y B. El sistema operará si funciona cualquiera de los componentes o ambos. Si el tiempo de vida, en horas del componente A es una variable aleatoria de Weibull con $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\theta=10$ y si la duración del componente B, también tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 2$ y $\theta = 12$, encuentre la probabilidad de que el sistema funcione por lo menos 20 horas.

SOLUCIÓN:

X_i: Duración del componente i, i = 1,2.

$$f(x_i) = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} X^{\alpha-1} e^{-(\frac{X}{\theta})^{\alpha}} \qquad \text{Si } X > 0; \ \theta, \alpha > 0$$

$$= 0 \qquad \text{otro caso.}$$

Sean los eventos:

A: El componente A funciona al menos 20 horas

B: El componente B funciona al menos 20 horas.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

y por ser A y B independientes

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)$$

$$P(A) = P(X_1 \geq 20) = 1 - P(X < 20)$$

$$= 1 - \int_0^{20} \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} X^{\alpha-1} e^{-(\frac{X}{\theta})^{\alpha}} dx \quad (*)$$

$$= 1 - (1-e^{-(\frac{20}{10})^{\frac{1}{2}}})$$

$$= e^{-\sqrt{2}}$$

$$= 0.245$$

$$P(B) = e^{-(\frac{20}{12})^2}$$

$$= e^{-2.77}$$

$$= 0.063$$

$$P(A \cup B) = 0.245 + 0.063 - (0.245)\ (0.063)$$

$$= 0.3234$$

$$(*)\ \int_0^{20} \frac{\alpha}{\theta^\alpha} X^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^\alpha} dx = \frac{\alpha}{\theta} \left(- \frac{\theta^\alpha}{\alpha}\right) e^{-(\frac{x}{\theta})^\alpha} \Big|_0^{20}$$

$$= - \left(e^{-(\frac{20}{\theta})^\alpha} - e^{-(\frac{0}{\theta})^\alpha} \right)$$

$$= 1 - e^{-(\frac{20}{\theta})^\alpha}$$

11. Supóngase que en la UAM-A se recibieron 6725 solicitudes de ingreso para el trimestre 85-O. En base a la experiencia de exámenes anteriores, se sabe que la calificación de los solicitantes está bien aproximada por una distribución normal con media 8 y desviación estándar de 1.5.

a).- Si se decidió admitir al 30% de los solicitantes en base a las mayores calificaciones. Encuentra la calificación mínima para ser admitido.

b).- Suponiendo que se admitió a los solicitantes que obtuvieron calificación mayor o igual a 7. ¿Qué porcentaje de solicitantes ingresó?.

SOLUCIÓN:

a). X: Calificación obtenida

$X \sim N(8,(1.5)^2)$

Se pide encontrar x tal que

$$P\left[X > x\right] = 0.30 \quad \text{o bien} \quad P\left[X < x\right] = 0.7$$

$$P\left[X < x\right] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-8}{1.5}\right]$$

$$= P\left[Z < \frac{x-8}{1.5}\right] = 0.7$$

Buscando en tablas se encuentra que:

$\frac{x-8}{1.5} = 0.524$ de donde se tiene que la calificación mínima para ser admitido fue:

$$X = 8.8$$

b). Hay que encontrar el valor de:

$$P\left[X \geq 7\right] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{7-8}{1.5}\right]$$

$$= P\left[Z \geq -0.66\right]$$

$$= 1 - P\left[Z < -0.66\right]$$

$$= 1 - (1-P\left[Z < 0.66\right])$$

$$= P\left[Z < 0.66\right]$$

$$= 0.7454$$

El porcentaje de alumnos que ingresó fue 74.54 %

VALORES ESPERADOS

Y

FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS

1. Un juego consiste en lanzar una moneda hasta 3 veces. El juego termina cuando aparezca águila o después de haberla lanzado 3 veces, lo que ocurra primero. Si en el primero, segundo o tercer lanzamiento aparece águila se ganan \$2, \$4 y \$8 respectivamente.

Si no aparece águila en los 3 intentos se pierden \$20.

¿Le recomendarías a alguien que jugara este juego?

SOLUCIÓN:

Si X es el monto de lo ganado o perdido en cada juego.

Los valores posibles de X y sus probabilidades son:

X	2	4	8	-20
P(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Si se juega varias veces el juego, la ganancia esperada (E(G)) es:

$$E(G) = \$2\left(\frac{1}{2}\right) + \$4\left(\frac{1}{4}\right) + \$8\left(\frac{1}{8}\right) - \$20\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 0.50$$

Por juego. Por lo tanto se le puede recomendar a alguien que juegue.

2. Un productor de anticongelante gana $100 por cada litro que vende en el otoño del año en que lo produjo. Si produce mucho, tiene que guardar el excedente hasta el siguiente año y esto le ocasiona un costo de $50 por litro. La distribución de la demanda en un año cualquiera está dada por la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = 10^{-6} \qquad 10^6 \leq x \leq 2\,(10^6)$$
$$= 0 \qquad \text{otro caso}$$

El productor desea encontrar la mejor política para un nivel de existencias óptimo al final del período.

Si $P(x,e)$ son las pérdidas para un nivel de existencias e.

$$P(x,e) = 100\ (x-e) \qquad x > e$$
$$= 50\ (e-x) \qquad x \leq e$$

$$Y \quad E\left[\ P(x,e)\ \right] = \int_{10^6}^{e} 50(e-x)\ 10^{-6}\ dx + \int_{e}^{2(10^6)} 100(x-e)\ 10^{-6}\ dx$$

$$= 50\left[\frac{10^{-6}}{2}\ .\ e^2 - e + \frac{10^6}{2}\right] + 100\left[\frac{10^{-6}}{2}\ .e^2 + 2.10^6\right]$$

$$= \left(\frac{3}{4}\ (10^{-6})\right)e^2 - \frac{5}{2}\ e + \frac{9}{4}\ (10^6)$$

Entonces $\frac{d\ E\left[P(x,e)\right]}{d\ e} = \frac{6}{4}\ 10^{-6} - \frac{5}{2}$ y una condición necesaria para un mínimo es que $\frac{d\ E\left[P(x,e)\right]}{d\ e} = 0$,

así $\frac{3\ (10^{-6})}{2}\ e - \frac{5}{2} = 0$ o bien $e = \frac{5}{3}\ (10^6)$ es la política óptima para un nivel de existencias.

3. Un voceador compra periódicos a \$60 cada uno y los vende a \$100.00. Cada ejemplar no vendido se lo reciben el día siguiente en \$40.00. La demanda diaria es independiente de la demanda del día anterior y tiene la siguiente distribución:

No. de clientes: X	23	24	25	26	27	28	29	30
Probabilidad, P(x)	0.01	0.04	0.10	0.10	0.25	0.25	0.15	0.10

Si el voceador compra demasiados periódicos, sufre una pérdida por el exceso de oferta, si compra pocos deja de ganar por no poder satisfacer la demanda.

Parece razonable para el voceador, comprar un número de periódicos tal que la pérdida esperada se minimice. Si e es el número de periódicos en existencia, X representa la demanda diaria y $\underline{P}(X,e)$ la pérdida del voceador para un nivel particular de existencias e; entonces, la pérdida es:

$$\underline{P}(x,e) = 40(x-e) \qquad \text{si } X > e$$

$$= 20(e-x) \qquad \text{si } X \leq e$$

y para un nivel de existencias e, la pérdida esperada es:

$$E\left[\underline{P}(X,e)\right] = \sum_{x=23}^{e} 20(e-X)\ P(x) + \sum_{x=e+1}^{30} 40(X-e)\ p^{(x)}$$

evaluando $E\left[\underline{P}(X,e)\right]$ para algunos valores de e:

Para e = 25

$$E\left[\underline{P}(X,25)\right] = 20\left[(25-23)(0.01)+(25-24)(0.04)+(25-25)(0.10)\right]+$$

$$+40\left[(26-25)(0.10)+(27-25)(0.25)+(28-25)(0.25)+(29-25)(0.15)+(30-25)(0.10)\right] = \$\ 99.20$$

Para e = 26

$$E\left[\underline{P}(X,26)\right] = 20\left[(26-23)(0.01)+(26-24)(0.04)+(26-25)(0.10)+(26-26)(0.10)\right]+$$

$$40\left[(27-26)(0.25)+(28-26)(0.25)+(29-26)(0.15)+(30-26)(0.10)\right] = \$\ 10.60$$

Para e = 27

$$E\left[\underline{P}(X,27)\right] = 20\left[(27-23)(0.01)+(27-24)(0.04)+(27-25)(0.10)+(27-26)(0.10)+(27-27)(0.25)\right]+$$

$$40\left[(28-27)(0.25)+(29-27)(0.15)+(30-27)(0.10)\right] =$$

$$= \$\ 43.20$$

Parece que el voceador debe comprar 26 periódicos si quiere minimizar la pérdida esperada. Para verificarlo ¡Checa los otros valores!

4. Usando la función generatriz de momentos encontrar la media y la variancia de una v.a. X con distribución binomial.

Definiciones

a). Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right] = \sum_x e^{tx}\, P_X(x)$$

b). Función de probabilidad binomial

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots n$$

SOLUCIÓN:

Función generatriz de momentos de la distribución binomial

$$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right] : \sum_x e^{tx}\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_x \binom{n}{x}(e^t p)^x q^{n-x}$$

Usando el Teo. del binomio de Newton.

$$\sum_x \binom{n}{x}(e^t p)^x q^{n-x} = (e^t p + q)^n$$

entonces

$$M'_X(t) = (e^t p + q)^n$$

derivando M(t) respecto de t y evaluando M'(t) en cero tenemos el 1er momento.

$$M'_X(t) = n\,(e^t p + q)^{n-1}\; e^t p$$

$$M'(o) = n\;(p + q)^{n-1}\; p \quad = \quad np\;;\;\; (p+q = 1 \therefore q = 1-p)$$

$$\mu = E\left[X\right] = np$$

La segunda derivada de M(t) evaluada en cero nos da el 2º momento.

$$M''(t) \;=\; n(e^t p + q)^{n-1}\; e^t p + n(n-1)\,(e^t p + q)^{n-2}\;(e^t p)^2$$

$$M''(o) \;=\; n(p+q)^{n-1}\; p + n(n-1)\;\;(p+q)^{n-2}\;\; p^2$$

$$= \;np + n(n-1)p^2 \;= np + n^2\, p^2 - n\, p^2$$

Sabiendo que la variancia es igual al 2º momento menos el cuadrado del 1$\underline{\text{er}}$ momento;

$$\sigma_x^2 = E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right]$$

Tenemos

$$\sigma_x^2 = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

$$= npq.$$

5. Suponiendo que X tenga la función de densidad de probabilidad siguiente:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \quad x \geq a$$

(Esta es conocida como una distribución exponencial con dos parámetros.).

a) Encontrar la función generatriz de momentos de X.

b) Usando la función generatriz de momentos, encontrar E(X) y V(X)

SOLUCIÓN:

a) La función generatriz de momentos de X está definida por:

$$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right]$$

$$= \int_a^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda(x-a)} dx$$

$$= \int_a^{\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x+\lambda a} dx$$

$$= \frac{\lambda e^{\lambda a}}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \Big|_a^{\infty}$$

$$= \frac{-\lambda}{t-\lambda} e^{ta} \quad \text{Si} \quad t < \lambda$$

b) Obteniendo la primera y segunda derivada respecto a t de la función generatriz de momentos y evaluando para t=0, se obtienen el primero y el segundo momentos de X, esto es:

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{-\lambda}{t-\lambda}\, e^{ta}\right)$$

$$M_X'(t) = \frac{-(t-\lambda)\,\lambda a e^{ta} - \lambda e^{ta}}{(t-\lambda)^2}$$

$$E\left[x\right] = M_X'(0)$$

$$= \frac{\lambda^2 a + \lambda}{\lambda^2}$$

de donde

$$E\left[x\right] = \frac{1 + \lambda a}{\lambda}$$

Por otra parte $M_X''(t) = \dfrac{(t-\lambda)^2\,\lambda a^2 e^{ta} + 2(t-\lambda)\,\lambda a\, e^{ta} - 2\lambda e^{ta}}{(t-\lambda)^3}$

de donde $E\left[X^2\right] = \dfrac{\lambda^3 a^2 + 2\lambda^2 a + \lambda 2}{\lambda^3}$

Como $V(X) = E\left[X^2\right] - \left[E(X)\right]^2$

Se obtiene:

$$= \frac{\lambda^3 a^2 + 2\lambda^2 a + 2\lambda}{\lambda^3} - \frac{(1+\lambda a)^2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{1-\lambda^2 a^2 + \lambda^3 a^2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

6. Usando la función generatriz de momentos, demostrar que si X y Y son variables aleatorias independientes con distribuciones $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ y $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ respectivamente, entonces $Z=aX + bY$ está nuevamente distribuida normalmente, en donde a y b son constantes.

SOLUCIÓN:

Como la función generatriz de momentos de una variable aleatoria W con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ es:

$$M_W(t) = e^{(t\mu + \sigma^2 t^2/2)}$$

entonces

$$M_X(t) = e^{(t\mu_X + \sigma_X^2 t^2/2)}$$

$$\text{y } M_Y(t) = e^{(t\mu_Y + \sigma_Y^2 t^2/2)}$$

Aplicando la definición de función generatriz de momentos a Z se obtiene:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\ &= E[e^{t(aX + bY)}] \\ &= E[e^{atX} \; e^{btY}] \\ &= E[e^{atX}]E[e^{btY}] \quad \text{Por hipótesis de independencia} \\ &= M_X(at)\; M_Y(bt) \end{aligned}$$

Sustituyendo $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ se obtiene:

$$M_Z(t) = e^{(at\mu_X + \sigma_X^2 a^2t^2/2)\;(bt\mu_Y + \sigma_Y^2 b^2t^2/2)}$$

$$M_Z(t) = e^{(t(a\mu_X + b\mu_Y) + (a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)t^2/2)}$$

Observando que la función generatriz de momentos de Z corresponde a una variable aleatoria normal con parámetros

$a\mu_X + b\mu_Y$ y $a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$. Entonces

$$Z \sim N\ (a\mu_X + b\mu_Y,\ a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

D I S T R I B U C I O N E S   M U E S T R A L E S

1. Demostrar que $Var(X_1 \pm X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$, cuando X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes.

Demostración.

$$V(X_1 \pm X_2) = E\left[(X_1 \pm X_2)^2\right] - \left[E(X_1 \pm X_2)\right]^2$$

$$= E\ (X_1^2 \pm 2X_1X_2 + X_2^2) - (E(X_1) \pm E(X_2))^2$$

$$= E\ (X_1^2) \pm 2E(X_1\ X_2) + E(X_2^2) - \left[E(X_1)\right]^2 \mp 2\ E(X_1)E(X_2) - \left[E(X_2)\right]^2$$

$$= E\ (X_1^2) - \left[E(X_1)\right]^2 + E(X_2^2) - \left[E(X_2)\right]^2 \pm 2E(X_1)E(X_2) \mp 2E(X_1)E(X_2)$$

$$= E(X_1^2) - \left[E(X_1)\right]^2 + E(X_2^2) - \left[E(X_2)\right]^2$$

$$= Var(X_1) + Var(X_2)$$

2. Demuestra que $Var(X_1+X_2+...+X_n) = Var(X_1)+ Var(X_2)+...+Var(X_n)$ Cuando todas las parejas X_i, X_j $i \neq j$ son independientes entre si.

Demostración

Por inducción matemática.

si n=2, es cierto

Supóngase que es cierto si n=k, es decir

$$Var(\sum_{i=1}^{k} X_i) = \sum_{i=1}^{k} Var(X_i)$$

entonces hay que demostrar que:

$$Var (\sum_{i=1}^{k} X_i+X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} Var (X_i) + Var (X_k+1)$$

como $Y= \sum_{i=1}^{k} X_i$ es una variable aleatoria y usando la independencia de cada sumando respecto a X_k+1

$$E\left[(\sum_{i=1}^{k} X_i)X_{k+1}\right] = \sum_{i=1}^{k} E(X_i,X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i) E(X_{k+1})$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} E(X_i)\right] E(X_{k+1})$$

$$Var (Y\pm X_{k+1}) = Var(Y) +Var(X_{k+1})\pm 2E(Y) E(X_{k+1})\mp 2E(Y) E(X_{k+1})$$

$$= Var (Y) + Var(X_{k+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} Var (X_i)$$

Que corresponden a la media y la varianza de una variable aleatoria binomial Y.

Estos resultados se pueden obtener también usando la función generatriz de momentos de Y.

$$M_Y(t) = (pe^t+q)^n$$

se sabe que $M'_Y(t)|_{t=0} = E(Y)$, que

$M''_Y(t) = E(Y^2)$ y que

$$Var(Y) = E\left[Y^2\right] - \left[E(Y)\right]^2$$

así:

$$E(Y) = M'_Y(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(pe^t+q)^n|_{t=0}$$

$$=n(pe^t+q)^{n-1}\, pe^t|_{t=0}$$

$$=n(p(1)+q)^{n-1}\, .\, p(1)$$

$$=np$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - n^2p^2$$

$$= M''_Y(t)|_{t=0} - n^2p^2$$

$$=\left[n(pe^t+q)^{n-1}\, pe^t + pe^t\, (n)\, (n-1)\, (pe^t+q)^{n-2}\, pe^t\right]|_{t=0} - n^2p^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2$$

$$= np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p)$$

$$= npq$$

3. Demuestra que si se tiene $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$, donde las X_i son variables aleatorias independientes con la misma distribución, entonces

a) $E(Y) = n\,E(X)$ con $E(X) = E(X_i)\ \forall\ i$

b) $Var(Y) = n\,Var(X)$ con $Var(X) = Var(X_i)\ \forall_i$

Demostración:

a) $E(Y) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X) = n\,E(X)$

b) $Var(Y) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X) = n\,Var(X)$

Considera la suma de n variables aleatorias Bernoulli,

$X_i = 0, 1$

$P(X_i=1) = p$

$P(X_i=0) = 1-p$

$E(X_i) = \sum_{i=0}^{1} X_i P(X_i) = 0(1-p) + 1p = p$

$$\begin{aligned} Var(X_i) &= E(X_1^2) - \left[E(X_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=0}^{1} X_1^2\, P(X_i) - \left[\sum_{i=0}^{1} X_i P(X_i)\right]^2 \\ &= 0(1-p) + 1p - \left[0(1-p) + 1p\right]^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) \\ &= pq \end{aligned}$$

Asi, si $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$

$Var(Y) = Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

4. Suponga que como resultado de experimentos con dos instrumentos A y B, uno encuentra la probabilidad de observar un ruido cuyo nivel es evaluado en un sistema de tres puntos, medido en decibeles

Nivel de Ruido		1	2	3
La probabilidad de observar un ruido de un nivel dado.	Instrumento A	0.20	0.06	0.04
	Instrumento B	0.06	0.04	0.10

A partir de estos datos seleccione el instrumento con menos nivel de ruido.

SOLUCIÓN:

$E_A(x)=0.20.1+0.06.2+0.04.3=$ 0.44 db.

$E_B(x)=0.06.1+0.04.2+0.10.3=$ 0.44 db.

Son equivalentes en cuanto al nivel de ruido promedio

$$\sigma_A(x)=\sqrt{E(x^2)-(Ex)^2}=\sqrt{0.80-0.44^2} = 0.78\text{db},$$

$$\sigma_B(x)=\sqrt{1.12-0.44^2} = 0.96\text{db}$$

Es más estable el primer aparato

5. Utilice los resultados anteriores para ilustrar el proceso de toma de muestras de tamaño n.

USO:

Originalmente se tiene el espacio Ω realcionado con la variable aleatoria cuyas características se desean medir, por ejemplo longitud de los tornillos producidos durante un día por una máquina. A cada elemento de la población le corresponde un sólo valor en centímetros. El espacio de medidas tiene una media igual a $\mu_X=\int_X f(x)dx \, (\mu_X=\Sigma x_i p(x_i))$

En este caso se supone que la población total de tornillos es un millón. La media corresponde a

$$\mu_X= \frac{\sum_{i=1}^{10^6} x_i}{10^6}$$

Se miden todos los tornillos y la suma de longitudes se divide entre el tamaño de la población. La varianza de X es

$$\sigma_X^2= \frac{\sum_{i=1}^{10^6} (x_i-\mu_X)^2}{10^6}$$

Decidimos tomar una muestra de tamaño $n \ll 10^6$.

Entonces estamos trabajando en un nuevo espacio de probabilidad, con una nueva población, la población de muestras de tamaño n. Esta nueva población consta de $\binom{10^6}{n}$ muestras, nuevos elementos, un número mucho mayor de individuos que el espacio original.

A cada muestra le asociamos su media $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ y su varianza. La colección de $\binom{10^6}{n}$ medias tiene una distribución de probabilidad [si n es grande, esta distribución es la normal por el teorema Central del Límite]

También tiene, por lo tanto, una media y una varianza

Su media $\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{\binom{10^6}{n}} \bar{X}_i}{\binom{10^6}{n}}$

Es claro que físicamente es imposible llevar a cabo todas las operaciones correspondientes a esta media.

¿Podemos sin hacer muchos cálculos estimar dicha media?

<u>Sí</u>

El modelo que planteamos es el siguiente:

Muestrear quiere decir en este caso medir n veces de la misma población Ω, es decir tomar una medida X_1, una segunda medida X_2, ... hasta X_n, todas con la misma distribución ya que provienen de la misma población. Es claro que X_1 y X_2 son independientes: el resultado de una medición la suponemos no afectando al resto de las medidas. Después sumamos las n mediciones independientes (que pueden recorrer todos los posibles tornillos de la producción) y dividir entre n.

Suponer que recorremos toda la población equivale matemáticamente a tomar el valor esperado.

De este modo $\mu_{\bar{X}} = E\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right)$

Como las medidas $X_1, X_2, \ldots X_n$ tienen la misma distribución

$$E\left(\frac{X_1}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}\right) = n\ E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{n}{n}\ E(X)$$

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_X = E(X)$$

El conjunto de valores $\bar{X}$ también tiene su varianza

$$\sigma_{\bar{X}}^{2} = \sigma_{\bar{X}}^{2} = VAR\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = VAR\left(\frac{X_1}{n} + \ldots \frac{X_n}{n}\right)$$

Como $\left\{\frac{X_i}{n}\right\}$ son independientes

$$\sigma_{\bar{X}}^{2} = VAR\left(\frac{X_1}{n}\right) + VAR\left(\frac{X_2}{n}\right) + \ldots + VAR\left(\frac{X_n}{n}\right)$$

Como $\left\{\frac{X_i}{n}\right\}$ tienen la misma varianza

$$\sigma_{\bar{X}}^{2} = n\ VAR\left(\frac{X}{n}\right) = n\ \frac{VARX}{n^2} = \frac{VARX}{n}$$

$$\boxed{\sigma_{\bar{X}}^{2} = \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

6. La función generatriz de momentos ($M_X(t)$) también puede usarse para encontrar la función de densidad de probabilidad de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con función generatriz de momentos $M_{X_1}(t)$, $M_{X_2}(t), \ldots M_{X_n}(t)$.

si $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$; $a_i \varepsilon R$

entonces

$$M_Y(t) = M_{X_1}(ta_1)M_{X_2}(ta_2)\ldots M_{X_n}(ta_n)$$

Demostración:

$$M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right]$$

$$= E\left[e^{t(a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n)}\right]$$

$$= E\left[e^{ta_1X_1}\ e^{ta_2X_2}\ldots e^{ta_nX_n}\right]$$

$$= E\left[e^{ta_1X_1}\right]\ E\left[e^{ta_2X_2}\right]\ldots E\left[e^{ta_nX_n}\right]$$

$$= M_{X_1}(ta_1)\ M_{X_2}(ta_2)\ldots M_{X_n}(ta_n)$$

7. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a.i. distribuidas de acuerdo a una normal con medias $E(X_i) = \mu_i$ y varianzas $Var(X_i) = \sigma_i^2$; $i=1,2,\ldots,n$.

Si $Y = a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$, $a_i \varepsilon R$ entonces Y es una v.a. que se distribuye normalmente con media

$$E(Y) = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots + a_n \mu_n.$$

y varianza

$$Var(Y) = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2 \sigma_n^2$$

Demostración:

La función generatriz de momentos de Y es:

$$M_Y(t) = M_{X_1}(ta_1)M_{X_2}(ta_2)\ldots M_{X_n}(ta_n)$$

$$= e^{ta_1\mu_1 + \frac{t^2a_1^2\sigma_1^2}{2}} e^{ta_2\mu_2 + \frac{t^2a_2^2\sigma_2^2}{2}} \ldots e^{ta_n\mu_n + \frac{t^2a_n^2\sigma_n^2}{2}}$$

$$= eXP\left[t\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + (t^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2)/2\right]$$

que se sabe corresponde a la función generatriz de momentos de una v.a. con distribución normal con media $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$

8. La proporción de un compuesto en una reacción química es una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad aproximada de que la media de una muestra aleatoria de tamaño 15 esté entre 3/5 y 4/5.
La siguiente información (fácil de probar) le es útil

$E(X^k) = 3/(k+3)$ para cualquier entero k

$E(X) = 3/4; \quad E(X^2) = 3/5, \quad Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3/80$

SOLUCIÓN:

Sea $\bar{X}_n = \sum_1^n X_i/n$ la media de la muestra de tamaño n.

y sea Z_n la estandarización de $\bar{X}_n$, en el sentido de que su media es cero y su varianza es uno, o sea

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - E(X)}{\sqrt{\frac{Var(X)}{n}}}$$

con $E(Z_n) = 0$; $Var(Z_n) = 1$. La distribución de Z_n, usualmente complicada, depende de n.
Usando la idea de que dos eventos equivalentes (la ocurrencia de un evento implica la ocurrencia del otro y viceversa) tienen la misma probabilidad entonces.

$$P(a < \bar{X}_n < b) = P\left(\frac{a - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} < Z_n < \frac{b - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\right)$$

$$P(a < \bar{X}_n < b) = F_{Z_n}\left(\frac{b - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\right) - F_{Z_n}\left(\frac{a - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}\right)$$

Como anunciamos anteriormente la distribución de Z_n es difícil de determinar. Sin embargo Z_n tiene una distribución límite muy simple que es la distribución de una variable aleatoria Z de tipo normal con media cero y varianza 1., o sea que

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq \alpha) = P(Z \leq \alpha)$$

o equivalentemente que

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(\alpha) = F_Z(\alpha)$$

Para todo número real α . obsérvese que la media y la varianza de Z coinciden con la media y la varianza de Z_n
$(E(Z) = 0 = E(Z_n);\ \ Var(Z) = 1 = Var(Z_n)\ )$.

para cualquier n. Sin embargo las distribuciones de Z_n y de Z son distintas excepto en el límite. Con esta aclaración entenderemos que estandarización significa transformar la variable $\bar{X}_n$ a una variable Z_n de media cero y varianza uno y no considerar que Z_n ya tiene una distribución normal, aunque en un lenguaje impreciso se haga entender así.

Aproximando F_{Z_n} por F_Z en los dos términos de lado derecho en la igualdad (1) y escribiendo $\bar{X}$ por $\bar{X}_n$, resulta:

$$P(a < \bar{X} < b) \doteq F_Z\left(\frac{b-E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}}\right) - F_Z\left(\frac{a-E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}}\right)$$

ya que $E(\bar{X}) = E(X) = 3/4$ y $Var(\bar{X}) = Var(X)/n = (3/80)/15 = 1/400$, tenemos

$$P(3/5 < \bar{X} < 415) = F_Z\left(\frac{415-3/4}{\sqrt{1/400}}\right) - F_Z\left(\frac{3/5-3/4}{\sqrt{1/400}}\right)$$

$$= F_Z(1) - F_Z(-3) = F_Z(1) - (1-F_Z(3))$$

$$= F_Z(1) + F_Z(3) - 1 = .841 + .999 - 1 = .84$$

9. Una fábrica produce determinados artículos de tal manera que el 2 por ciento resulta defectuoso. Se inspecciona un gran número de tales artículos, n, y se anota la frecuencia relativa de defectuosos, f_0. ¿Cuál debería ser el tamaño de n a fín de que la probabilidad sea 0.98 de que f_0 difiera de 0.02 en menos de 0.05?

SOLUCIÓN:

Se pide encontrar n tal que

$$P\left[\ |f_0 - 0.02| < 0.05\ \right] \geq 0.98$$

aplicando la ley de los grandes números se tiene:

$$P\left[\ |f_0 - 0.02| < 0.05\ \right] \geq 1 - \frac{0.02(1-0.02)}{n(0.05)^2}$$

obteniendo de las 2 expresiones anteriores

$$0.98 = 1 - \frac{0.02(1-0.02)}{n(0.05)^2}$$

y despejando n

$$n = \frac{1-0.02}{(0.05)^2}$$

O sea

$$n = 392$$

b) Contesta la a) si 0.02, la probabilidad de tener un artículo defectuoso se sustituye por P que se supone desconocida.

SOLUCIÓN:

De la expresión usada en a), se tiene:

$$0.98 = 1 - \frac{P(1-P)}{n(0.05)^2}$$

y despejando n

$$n = \frac{P(1-P)}{0.02(0.05)^2}$$

el cual es máximo cuando $P = 1/2$, de donde si se toma

$$n \geq \frac{(0.5)(0.5)}{0.02(0.05)^2}$$

$$n \geq 5000$$

se garantiza la probabilidad pedida.

10. Una tienda que vende aparatos electrodomésticos, ofrece tres marcas de refrigeradores. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias que representan el volumen mensual de ventas para las tres marcas en esta tienda. Si X_1, X_2 y X_3 son v.a.i. normalmente distribuidas con medias \$8000, \$15000 y \$12000 y desviación estandar de \$2000,\$5000 y \$3000, respectivamente, encuentra la probabilidad que para un mes particular el volumen total de ventas para todos los refrigeradores en esta tienda exceda a \$50,000.

SOLUCIÓN:

El total de ventas en un mes es:

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

se pide hallar

$$\Pr\left[Y > 50000\right] = 1 - \Pr\left[Y \leq 50000\right]$$

$$= 1 - \Pr\left[\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{50,000-(8000+15000+12000)}{\sqrt{2000^2 + 5000^2 + 3000^2}}\right]$$

$$= 1 - \Pr\left[Z \leq 76.9\right]$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

El resultado es lógico ya que σ_Y resulta muy pequeña comparada con las diferencias solicitadas.

11. Una máquina empaca cereal en cajas de 500 gr.

El peso del cereal empacado en cada caja es una v.a. normalmente distribuida con media μ =500gr. y desviación estándar 20 gr. Para checar que el peso promedio de cereal empacado es 500 gr., se selecciona periodicamente una muestra aleatoria de 25 cajas y se pesa el contenido de cada una. El gerente de producción decide parar el proceso y ver posibles fallas en el momento en que el peso promedio de la muestra sea menor de 490 gr. o mayor de 510 gr. Hallar la probabilidad de que se pare el proceso.

Solución:

Sea X_i: el peso del cereal en la caja i de una muestra aleatoria:

$$X_i \sim N(500, 20^2) \text{ y } \bar{X} \sim N\left(500, \left(\frac{20}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$$

$$Pr\left[\text{Parar el proceso}\right] = P_r\left[\bar{X} \leq 490 \text{ o } \bar{X} \geq 510\right]$$

$$= 1- P_r\left[490 < X < 510\right]$$

$$= 1-P_r\left[\frac{490-500}{4} < \frac{X-500}{20/\sqrt{25}} < \frac{510-500}{4}\right]$$

$$= 1-\left[N_Z(2.5)-N_Z(-2.5)\right]$$

$$= 2-2N_Z(2.5)$$

$$= 0.0124$$

12. La compañía petrolera "La Flama" está pensando modificar el proceso actual para producir gasolina de petróleo crudo. La refinería adoptará la modificación sólo si aumenta el promedio de gasolina producida (como un porcentaje del crudo). Basado en un experimento de laboratorio en el que se usaron muestras de tamaño 12 para cada método, el promedio de gasolina producido por el método actual fué de 24.6 con desviación estandar de 2.3 y el promedio con el método propuesto 28.2 con desviación estándar de 2.7 si se considera que la producción con los dos métodos son v.a.i. distribuídos de acuerdo a una normal con varianzas iguales ¿Sería adoptado el método propuesto?.

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$\bar{X}_1 = 24.6 \qquad S_1 = 2.3$$

$$\bar{X}_2 = 28.2 \qquad S_2 = 2.7$$

Se adoptará el nuevo método si

$\Pr\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 0\right]$ es significativamente diferente de cero.

si $\Delta\bar{X} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$, $\Delta_\mu = \mu_1 - \mu_2 = 24.6 - 28.2 = -3.6$

$$\sigma_{\Delta\bar{X}} = \sqrt{\frac{(2.3)^2}{12} + \frac{(2.7)^2}{12}} = 1.0238 \qquad \text{entonces}$$

$$\Pr\left[\Delta\bar{X} < 0\right] = \Pr\left[\frac{\Delta\bar{X} - \Delta\mu}{\sigma_{\Delta\bar{X}}} < \frac{0 - \Delta\mu}{\sigma_{\Delta\bar{X}}}\right]$$

$$= \Pr\left[Z < \frac{0-(-3.6)}{1.0238}\right]$$

$$= \Pr\left[Z < 3.5163\right]$$

$$= 1$$

Por lo que se adoptará el nuevo método.

ESTIMACION PUNTUAL

Y

POR INTERVALOS

1. Encuentra un estimador de máxima verosimilitud del parámetro p de una distribución de Bernoulli. ¿es insesgado el estimador? ¿Por qué?.

SOLUCIÓN:

Si X es una v.a. Bernoulli su función de probabilidad es:

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad \text{si } x=0,1$$
$$= 0 \quad \text{en otro caso}$$

La función de verosimilitud de una muestra de tamaño n es.

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$LnL(p) = \sum_{i=1}^{n} Lnp + (n-\sum_{i=1}^{n} x_i) Ln(1-p)$$

$$\frac{dLnL(p)}{dp} = \frac{\Sigma x_i}{p} - \frac{n-\Sigma x_i}{1-p} = 0$$

$$\Sigma x_i - p\Sigma x_i = np - p\Sigma x_i$$

$$\hat{p} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \bar{X}$$

p es insesgado si

$$E(\hat{p}) = p$$

$$E\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\Sigma\, E(x_i)$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\, p$$

$$= \frac{1}{n}.\, np$$

$$= p$$

Por lo tanto $\hat{p}$ es insesgado

2. Encuentra un estimador de máxima verosimilitud para cada uno de los parámetros μ y σ^2 de la distribución normal, ¿Son insesgados? ¿Por qué?.

SOLUCIÓN:

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$\operatorname{LnL}(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\operatorname{Ln}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \operatorname{LnL}(\mu,\sigma^2)}{\partial_\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \operatorname{LnL}(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\Sigma(x_i-\mu)^2 = 0$$

La solución de las dos ecuaciones de los estimadores máximo verosímiles de los parámetros

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$$

Para ver si son insesgados: (se sabe que $E(x_i) = \mu$)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma E(x_i)$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\mu$$

$$= \mu$$

Por lo tanto $\bar{X}$ es un estimador insesgado de

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left[\frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left\{\Sigma\left[(x_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n} E\left[\Sigma(x_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\,\Sigma(x_i - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left[\Sigma(x_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\,n(\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma E(x_i - \mu)^2 - n\,E(\bar{X} - \mu)^2$$

pero $E(x_i - \mu)^2 = V(x_i) = \sigma^2$ y $E(\bar{X} - \mu)^2 = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

así $$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}(n\sigma^2 - \sigma^2)$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$ es un estimador que no es insesgado

3. Una gran tienda desea estimar con un coeficiente de confianza de 0.98 y un error máximo de \$5.00, la verdadera media del valor en pesos de las compras mensuales de sus clientes de cuenta corriente. ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra que el negocio tome de sus registros para satisfacer las especificaciones, si se sabe que la desviación stándard es \$15.00?.

SOLUCIÓN:

El riesgo $\delta < Z_{1-\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$, se sabe que $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\alpha = 0.02$

y $\delta=5$ entonces $5 < Z_{0.99} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ o sea

$$n \geq \frac{(2.33)^2 (15)^2}{5^2} = \frac{1221.5}{25} = 48.86$$

$$n \geq 49$$

4. Se conoce que la desviación stándard de las tasas medias de salarios semanales de los ascensoristas es de \$2.79. Una muestra aleatoria de 100 ascensoristas da una media de la tasa media de salario semanal de \$87.45.

Construya:

a) un intervalo de confianza de 95 por ciento para la verdadera media de las tasas medias de salarios semanales de los ascensoristas.

b) Otro intervalo igual al mencionado pero de 99% de confianza.

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) $1 - \alpha = 95\%$

$$\alpha = 0.05 \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$= 1.96$$

$$Pr\left[\bar{x} - Z_{1-\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{x} + Z_{1-\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}}\right] = 1 - \alpha$$

$$Pr\left[87.45 - (1.96)\left(\frac{2.79}{\sqrt{100}}\right) < \mu < 87.45 + (1.96)\left(\frac{2.79}{\sqrt{100}}\right)\right] = 0.95$$

$$Pr\left[86.9 < \mu < 88.00\right] = 0.95$$

b) $1 - \alpha = 99\%$

$\alpha = 0.01$

$Z_{1-\alpha/2} = 2.58$

$$Pr\left[\bar{x} - Z_{1-\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{x} + Z_{1-\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}}\right] = 1 - \alpha$$

$$Pr\left[87.45 - (2.58)\left(\frac{2.79}{\sqrt{100}}\right) < \mu < 87.45 + (2.58)\left(\frac{2.79}{\sqrt{100}}\right)\right] = 0.99$$

$$Pr\left[86.73 < \mu < 88.17\right] = 0.99$$

5. A los grupos seleccionados aleatoriamente, de 50 estudiantes cada uno, de una escuela de secretariado se les enseña taquigrafía por dos sistemas diferentes y luego se les examina con un dictado. Se halló que el primer grupo promedió 120 palabras por minuto con una desviación estandar de 11 palabras, mientras que el segundo grupo promedió 110 palabras por minuto con una desviación estandar de 10 palabras. Construya un intervalo de 99% de confianza para $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$.

SOLUCIÓN:

$$n_1 = n_2 = 50 \qquad\qquad n > 30$$

$$\Delta\bar{x} = 120 - 110 = 10$$

$$\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{\frac{121}{50} + \frac{100}{50}} = \sqrt{4.42} = 2.1023$$

El intervalo es de la forma

$$\Pr\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2_{X_1}}{n_{X_1}} + \frac{\sigma^2_{X_2}}{n_{X_2}}} < \Delta\mu < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2_{X_1}}{n_{X_1}} + \frac{\sigma^2_{X_2}}{n_{X_2}}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[10 + (2.58)(2.1023) < \Delta\mu < 10 + (258)(2.1023)\right] = 0.99$$

$$\Pr\left[4.576 < \Delta\mu < 15.424\right] = 0.99$$

6. En química orgánica frecuentemente se purifican los compuestos orgánicos por un método conocido como cristalización fraccionada. Un experimentador deseaba preparar y purificar 4.85 gramos de anilina. Se prepararon individualmente diez cantidades de anilina de 4.85 gramos y se purificaron convirtiéndose en acetanilida. Las cantidades obtenidas fueron: 3.85, 3.88, 3.90, 3.62, 3.72, 3.80, 3.85, 3.36, 4.01 y 3.83. Estime el número promedio de gramos de acetanilida que se pueden recuperar de una cantidad inicial de 4.85 gramos de anilina. Use un intervalo de 95% de confianza.

SOLUCIÓN:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad \text{y}$$

$$P\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Si $\bar{X} = 3.783$ y $S = 0.3171$ entonces

$$P\left[3.782 - t_{0.975}\frac{0.3342}{3.1623} < \mu < 3.782 + t_{0.975}\frac{0.3171}{3.1623}\right] = 0.95$$

o

$$P\left[3.54 < \mu < 4.02\right] = 0.95$$

Lo que significa que si se preparan 100 cantidades de anilina de 4.85 gr., 95 darán una cantidad de acetanilida entre 3.54 y 4.02.

P R U E B A S   D E   H I P Ó T E S I S

1. El promedio de calificaciones en Probabilidad y Estadística en todas las veces que se ha impartido el curso es de 7.0 con una desviación estándar de 1.0 (considerar una población grande).

Este año el promedio de calificaciones es sólo de 6.8 en un grupo de 36 alumnos. Se desea conocer si la calificación promedio de los alumnos está disminuyendo o se puede considerar igual, para un nivel de confianza de 95%

SOLUCIÓN:

H_0: $\mu = 7.0$

H_1: $\mu < 7.0$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$$

$1-\alpha = 95\%$, $\alpha = 0.05$

$$Z_{0.05} = -1.645$$

Rechazar H_0 si $Z_c < -1.645$

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{6.6 - 7.0}{\frac{1}{6}} = -0.4 \quad 6 = -2.4$$

Se rechaza H_0; la media ha bajado

2. Una fábrica suministra fusibles, 90% de los cuales funcionan apropiadamente. Un nuevo proceso es iniciado, cuyo propósito es aumentar la proporción de fusibles que funcionan adecuadamente. Queremos probar la hipótesis

$$H_0: \quad p = 0.90$$
$$H_1: \quad p > 0.90$$

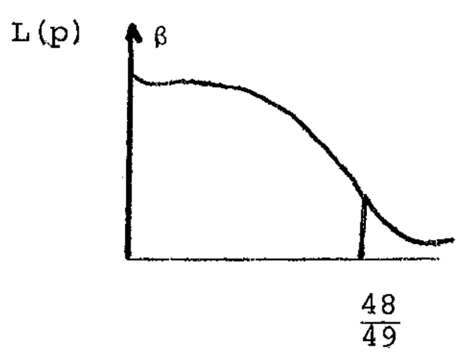
Se obtiene una muestra de 50 fusibles producidos con el nuevo proceso y se cuenta el número X_1 de los que funcionan bien. ¿Cuál es la expresión para la función CO si se toma el siguiente criterio?. Rechace H_0 cuando $X > 48$ y acepte en otro caso.

Calcule α $\qquad \beta = P(H_0 \mid H_1) = P(X \leq 48 \mid p > 0.90)$

$$L(p) = p(X \leq 48) = 1 - p(X \geq 49)$$

$$= 1 - \sum_{k=49}^{50} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k}$$

$$= 1 - p^{49}(50-49p) \qquad (\text{¿verdad?})$$



$\therefore L(0) = 1 \quad L(1) = 0 \quad L'(p) < 0 \ \forall p \quad 0<p<1$

$L''(p) = \quad$ si $\quad p = \frac{48}{49}$

$L(0.9) = P(\text{aceptar } H_0 \mid p>0.9) = P(\text{aceptar } p=0.9 \mid p>0.9) = 1-\alpha$

$\therefore \alpha = 1-L(0.9) = (0.9)^{49}\ (50-44.1) = 0.034$

3. Si se supone que X tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocida. Para probar $H_0: \mu=\mu_0$ versus $H_1: \mu=\mu_0$ se propone el método siguiente: Se toma una muestra tamaño n y se rechaza H_0 siempre que $|\bar{X} - \mu_0| > C$, en donde C es una constante que debe determinarse.

a) Obtener una expresión para la función OC, $L(\mu)$ mediante la distribución normal tabulada.

b) Si el nivel de insignificación de la prueba es $\alpha = 0.01$, obtener una expresión para C.

SOLUCIÓN:

a) La función de Operación Característica (función OC) de la prueba en consideración está definida como

$$L(\mu) = P(\text{aceptar } H_0/\mu)$$

$$= P(|\bar{X} - \mu_0| \leq C/\mu)$$

O sea, $L(\mu)$ es la probabilidad de aceptar H_0 considerada como una función de μ.

Así,

$$L(\mu) = P(|\bar{X} - \mu_0| \leq C/\mu)$$

$$= P(-C \leq \bar{X} - \mu_0 \leq C/\mu)$$

$$= P(-C + \mu_0 \leq \bar{X} \leq C + \mu_0/\mu)$$

$$= \left(\frac{-C + \mu_0 - \mu}{\sigma/ n} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/ n} \leq \frac{C + \mu_0 - \mu}{\sigma/ n}\right)$$

Finalmente, como $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, se obtiene:

$$L(\mu) = N_Z\left(\frac{C + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - N_Z\left(\frac{-C + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

b) Para un nivel de significación de la prueba $\alpha = 0.01$, se tiene:

$$L(\mu) = P(|\bar{X} - \mu_0| \leq C|\mu) = 0.99$$

de donde

$$N_Z\left(\frac{C + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - N_Z\left(\frac{-C + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

Por la simetría de la distribución normal se obtiene que:

$$N_Z\left(\frac{C + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.005$$

y $$N_Z\left(\frac{-C + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.005$$

y de las tablas de la distribución normal estandarizada

$$\frac{C + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.57$$

Finalmente despejando C, se obtiene la expresión

$$C = \mu - \mu_0 + 2.57\ \sigma/\sqrt{n}$$

Teniéndose para $\mu = \mu_0$

$$C = 2.57\ \sigma/\sqrt{n}$$

4. Se supone que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocida. Para probar $H_0: \mu = \mu_0$ versus $H_1: \mu < \mu_0$ se propone el método siguiente: obtener una muestra de tamaño n y rechazar H_0 siempre que el promedio muestral $\bar{X}$ sea menor que C, en donde C es una constante que debe determinarse.

a) Obtener una expresión para la función OC, $L(\mu)$ mediante la distribución normal tabulada.

b) Si el nivel de significación de la prueba es $\alpha=0.01$, obtener una expresión para C.

c) Supóngase que $\sigma^2=4$ y supóngase que se está probando H_0: $\mu=30$ versus H_1: $\mu<30$. Determinar el tamaño muestral n y la constante C a fin de satisfacer las condiciones $L(30)=0.98$ y $L(27)=0.01$.

d) Supóngase que se obtienen los siguientes valores muestrales de X:

27.1;29.3;31.5;33.0;30.1;30.9;28.4;32.4;31.6;28.9;27.3;29.1

¿Rechazaría H_0 (versus H_1) como se estableció en (c) al nivel de significación del 5 por ciento?

SOLUCIÓN:

a) La función de operación característica, función OC de la prueba está definida como:

$$L(\mu) = P(\text{aceptar } H_0/\mu)$$
$$= P(\bar{X} \geq C/\mu)$$

Si μ es el verdadero valor de $E(X)$, entonces $\bar{X}$ tiene distribución $N(\mu\ ,\sigma^2/n)$, así,

$$L(\mu) = P(\bar{X} \geq C/\mu)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\,n} \geq \frac{C - \mu}{\sigma/\,n}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\,n} \leq \frac{C - \mu}{\sigma/\,n}\right)$$

$$= 1 - N_Z\left(\frac{C - \mu}{\sigma/\,n}\right)$$

b) Si $\alpha = 0.01$, entonces $L(\mu) = 0.99$

$$y \quad 1 - N_Z\left(\frac{C - \mu}{\sigma/\,n}\right) = 0.99$$

$$N_Z\left(\frac{C - \mu}{\sigma/\,n}\right) = 0.01$$

Buscando en tablas de la distribución normal estandarizada se obtiene:

$$\frac{C - \mu}{\sigma/\,n} = -\ 2.33$$

y por tanto

$$C = \mu - 2.33\ \ \sigma/\,n$$

c) Si $\sigma^2 = 4$, $L(30) = 0.98$ y $L(27) = 0.01$, buscando en tablas, se tiene que:

Para $L(30) = 0.98$, $\dfrac{C - \mu}{\sigma/\ n} = 2.05$ con $\mu=30$ y $\sigma=2$

y para $L(27) = 0.01$, $\dfrac{C - \mu}{\sigma/\ n} = 2.33$ con $\mu=27$ y $\sigma=2$

de donde:

C y n deben satisfacer:

$$C = 30 - 2.05\ (2)/\ n$$

$$\text{y} \quad C = 27 + 2.33\ (2)/\ n$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$n = 8.5 \quad \text{y } C = 28.6$$

d) Para los valores muestrales dados, se tiene:

$$\bar{X} = 29.97 \quad \text{con } n = 12$$

Para un nivel de significación $\alpha= 0.05$

$$L(30) = 0.95$$

si $\quad L= 30 - 1.64(2)/\ 12$

$\quad C= 29.053$

Como $\bar{X} > C$ de acuerdo al nivel de significancia considerando, no se rechazaría H_0: $\mu= 30$

5. Se diseña cierta dimensión crítica de 5 pulgadas para que una pieza manufacturada encaje en otras. Se sabe que la varianza del objeto manufacturado es de 0.0064 pulgadas^2.

Si una muestra dada de 49 en un día presenta $\bar{x} = 5.05$ ¿Se debe rechazar la hipótesis nula $\mu = 5$ en favor de la hipótesis alternativa $\mu \neq 5$?

SOLUCIÓN:

$H_0 : \mu = 5$
$H_1 : \mu \neq 5$

Nivel de significación $\alpha = 0.05$

Estadística de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{5.05 - 5}{\sqrt{\dfrac{0.0064}{49}}} = 4.54$

Regla de decisión: Rechazar H_0 si y solo si $|z| > 1.96$

Decisión: $z > 1.96$ Se acepta la hipótesis de que $\mu \neq 5$

6. Los siguientes datos representan los tiempos de ensamble de 20 unidades seleccionadas aleatoriamente: 98, 10.4, 10.6, 9.6, 9.7, 9.9, 10.9, 11.1, 9.6, 10.2, 10.3, 9.6, 9.9, 11.2, 10.6, 9.8, 10.5, 10.1, 10.5, 9.7. Suponiendo que el tiempo de ensamble de las unidades de una variable aleatoria normal con media μ y desviación estándar $\sigma = 0.6$ minutos. Basándose en esta muestra ¿hay razón para creer que el tiempo promedio de ensamble excede de 10 minutos? Usando $\alpha=0.05$

SOLUCIÓN:

Hay que probar la hipótesis

$$H_0: \quad \mu=10$$

Contra la alternativa

$$H_1: \quad \mu > 10$$

Si H_0 se rechaza con $\alpha=0.05$, hay razón para creer que el tiempo promedio de ensamble es mayor de 10 minutos. Ya que $P\left[Z > 1.645\right] = 0.05$, el valor crítico es $Z_{0.95} = 1.645$, de los datos de la muestra: $\bar{X} = 10.2$ minutos

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10.2 - 10}{0.6/\sqrt{20}} = 1.4907$$

Ya que $Z = 1.4907 < Z_{0.95} = 1.645$, no puede rechazarse H_0.

7. Si en el problema anterior, el tiempo medio de ensamble es 10.3 minutos, hallar la probabilidad de rechazar la hipótesis nula. Se quiere determinar la potencia de la prueba para detectar la falsedad de H_0 cuando la verdadera media es 10.3 minutos.

$$= P\left[\bar{X} < Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0 \;\middle|\; \mu = \mu_1 > \mu_0\right]$$

$$= P\left[Z < \frac{Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = \mu_1\right]$$

$$= P\left[Z < \frac{\frac{(0.6)(1.645)}{20} + 10-10.3}{0.6/\sqrt{20}} \;\middle|\; \mu = 10.3\right]$$

$$= P\left[Z < -0.59 \quad \mu = 10.3\right]$$

$$= 0.2776$$

Así la probabilidad de no rechazar H_0 cuando la media es 10.3 minutos es 0.2776. Por lo tanto, la potencia de la prueba:

$$1-\beta = 0.7224$$

8. Supóngase que la Secretaría de Salud estuviera interesada en actualizar su información acerca de la proporción de mujeres que fuman.

Basándose en estudios anteriores se cree que la proporción es de 40%. Se lleva a cabo una encuesta en la cual a 1200 mujeres de varias edades, seleccionadas aleatoriamente se les pregunta acerca de sus hábitos de fumar. De las 1200, 420 son fumadoras. Use un método aproximado para determinar si esta evidencia apoya la afirmación de que la proporción de mujeres fumadoras es diferente de 40% para $\alpha = 0.01$

SOLUCIÓN:

Hay que probar la hipótesis

$$H_0\colon\ p=0.40$$

Contra la alternativa

$$H_1\colon\ p\neq 0.40$$

Se puede demostrar que

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}} \longrightarrow N(0,1)$$

$Z_{1-\alpha/2} = Z_1 - 0.995 = 2.575$ por lo que se rechazará H_0 si

$|\,Z\,| > 2.575$

$$Z = \frac{0.35 - 0.40}{\sqrt{\frac{(0.35)(0.65)}{1200}}} = -3.6321$$

Por lo tanto hay que rechazar H_0.

9. La cooperativa El Jalón, está tratando de decidir cuál de dos tipos de trigo va a sembrar. Se sembraron 30 hectáreas de cada clase expuestos a condiciones bastante uniformes. Los resultados fueron: Variedad A, cosecha media 3.30 toneladas por hectarea (ton/ha); con varianza de 0.5; variedad B, cosecha media 3.57 ton/ha con varianza 1.2. Quieren usar la variedad B, porque la semilla es un poco más barata, a menos de que haya una evidencia de que la variedad A es mejor. Usar $\alpha = 0.01$

SOLUCIÓN:

Se va a probar $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$

Contra la alternativa

$$H_1: \mu_A - \mu_B > 0$$

Se rechaza H_0 si $$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \rightarrow t_{1-\alpha},\ n_A+n_B-2$$

donde $$S_p^2 = \frac{(n_A-1) S_2^2 + (n_B-1)\ S_B^2}{n_A+n_B-2}$$

Así $$S_p^2 = \frac{(29)(0.5)+(29)(1.2)}{58} = 0.85\ ,\ T=-1.2302 \text{ y}$$

$t_{0.99,58} = 2.392$, con lo que no se puede rechazar H_0 y se puede sembrar la variedad B.

10. La compañía Mariscos del Golfo, envasa camarón congelado usando dos métodos y dan aproximadamente el mismo valor medio. Sin embargo, el método 2 es más rápido y a la compañía le interesa usarlo a menos que pueda mostrarse que su varianza es mayor que la del método 1 con un nivel de significación de 0.05. Se examina una muestra de 41 envases de los producidos por cada método. Las desviaciones estándar son: S_1=0.5gr para el método 1 y S_2= 0.62gr para el método 2 ¿Qué decisión debe tomarse?.

SOLUCIÓN:

Probar $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Contra $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Se rechaza H_0 si $F= \dfrac{S_1^2}{S_1^2} \leq F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$ o también

Si $F \leq \dfrac{1}{F_{1-\alpha, n_2-1, n_1-1}}$

$$F= \frac{0.50}{0.62} = 0.8065$$

$$\frac{1}{F_{.95,40,40}} = \frac{1}{1.69} = 0.591$$

Como $F \leq \dfrac{1}{F_{.95,40,40}}$ no se rechaza H_0 y se puede utilizar el método 2.

PROBLEMAS

1. Alguien desea comprar una gran cantidad de focos de luz y tiene que elegir de entre 2 marcas, I y II. Esta persona compró 100 focos de cada marca y encontró mediante una prueba que la marca I tiene un tiempo de vida medio de 1120 horas con desviación estandar de 75 horas, y la marca II tiene un tiempo de vida de 1064 horas con desviación estandar de 82 horas. ¿Es significativa la diferencia de los tiempos medios de vida?

RESPUESTA

Se rechaza H_0, si es significativa la diferencia.

con $\alpha = 0.05$

2. En el problema 1 la hipótesis se rechaza cuando $\alpha = 5\%$, al escoger un tamaño de muestra menor, debemos obtener menos información. ¿Para qué tamaño n de muestra se aceptará la hipótesis, aun cuando $\alpha = 5\%$ y las medias y desviaciones estandar son como en el problema anterior?

RESPUESTA

$n = 16$, tomando $\alpha = 0.05$

3. Con el fin de comparar 2 métodos para determinar el contenido de almidón en las papas, se cortan en mitades 16 papas y a cada una de las 2 mitades se les aplica uno de los 2 métodos. Las diferencias (medidas en multiplos de 0.1%) fueron:

2	0	0	1	2	2	3	-3	1	2	3	0	-1	1	-2	1

Probar la hipótesis de que la diferencia entre los métodos no es significativa.

RESPUESTA

No se rechaza H_0 , (α = 0.05)

4. Supóngase que en cierto proceso para producir alambre la resistencia a la ruptura del alambre es una variable aleatoria normal con media 90.8Kg. Para reducir los costos de producción se prueba otro proceso. Una muestra correspondiente de 100 valores tiene la media $\bar{X}$ = 85.35Kg., y la desviación estandar S = 2.724Kg., ¿El nuevo proceso tiene un efecto negativo sobre la resistencia del alambre?

RESPUESTA

El nuevo proceso si tiene un efecto negativo (α = 0.05)

5. Supóngase que de experiencias anteriores se sabe que cuando cierto torno automático está funcionando apropiadamente, en promedio, 3% de las partes producidas son defectuosas. El fabricante desea probar la hipótesis H_0: P = 0.03 usando una muestra de 500 partes durante el transcurso de una operación del día y que contiene 26 partes defectuosas.

RESPUESTA

Se rechaza H_0 , (α = 0.05)

6. Supóngase que la desviación estandar del peso de ciertos paquetes de 708.75 gramos llenados por una máquina fue 113.40 gramos. Probar la hipótesis H_0: $\sigma = 113.40$ contra la alternativa H_a: $\sigma > 113.40$ (un incremento indeseable), usando una muestra de 10 paquetes con desviación estandar 141.75 gramos.

RESPUESTA

No se rechaza la hipótesis ($\alpha = 0.05$)

7. Supóngase que sabemos que rociando los campos contra los efectos del barrenador del cereal, no disminuye la cosecha del mismo. Probar la hipótesis de que rociando no crece la producción, contra la alternativa de que si crece. En la prueba usar una muestra de 10 valores de diferencias de producción (Producción de cereal en una franja de tierra rociada, menos la producción de cereal en una franja de tierra no rociada del campo, medido en bushels/acre) con media $\bar{X} = 6$ y varianza $S^2 = 40$.

RESPUESTA

Se rechaza H_0. ($\alpha = 0.05$)

8. ¿Es significativa la diferencia de aumento de peso (kilogramos por mes) de dos grupos de cerdos, si los dos grupos se alimentaron bajo dos dietas diferentes?

GRUPO I	33	66	26	43	46	55	54
GRUPO II	53	53	37	73	58	61	38

RESPUESTA

No es significativa la diferencia

($\alpha = 0.05$)

9. Con las siguientes muestras de consumo de oxígeno (en mm^3/h) del salmón, probar la hipótesis de que el consumo es independiente de la repidez del agua, contra la alternativa de que es mayor en ríos cuyo flujo es más rápido.

RAPIDEZ	CONSUMO DE OXÍGENO								
Alta	108	122	144	129	107	115	114	97	96	126
Baja	85	152	83	69	95	87	71	94	83	94

RESPUESTA

Se rechaza la hipótesis

($\alpha = 0.05$)

10. En un estudio acerca de la efectividad de métodos de trabajo, una firma desea comparar dos tipos de métodos de sele - cción manual (empleados, entre otras, en la industria del cacahuate). Nueve participantes en la prueba obtienen los siguientes datos (número de habas machacadas de blanco en un intervalo de tiempo dado).

NUM. TRABAJADOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PRIMER MÉTODO	214	253	276	215	238	221	210	229	269
SEGUNDO MÉTODO	281	279	260	230	267	253	205	265	299

Probar la hipótesis de que ambos métodos dan iguales resultados contra la alternativa de que el segundo método es mejor.

RESPUESTA

Se rechaza la hipótesis H_0 y se asegura que el segundo método es el mejor. ($\alpha = 0.05$)

11. Se usó gasolina de marca A en 9 automóviles semejantes bajo idénticas condiciones. La muestra correspondiente de 9 valores (kilómetros por litro) tiene media 8.565 y desviación estandar 0.212 bajo las mismas condiciones, la gasolina de alta potencia de marca B de una muestra de 10 valores con media 9.243 y desviación estandar 0.254. Probar la hipótesis de que A y B son de igual calidad con respecto al kilometraje, contra la alternativa de que B es mejor.

RESPUESTA

No se rechaza H_0 $(\alpha = 0.05)$

Problemas de
Probabilidad y Estadística
Se terminó de imprimir
en el mes de septiembre del año 2005
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición
estuvo a cargo de
la Sección de Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron
200 ejemplares más sobrantes
para reposición.